

коэффициента индуктивного сопротивления:

$$C_x = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \quad (47,10)$$

Коэффициент сопротивления крыла мы определяем как

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 l_x l_z}, \quad (47,11)$$

относя его, как и коэффициент подъемной силы, к площади крыла в плане.

Задача

Определить минимальное значение индуктивного сопротивления, которое может быть достигнуто при заданных подъемной силе и размахе крыла $l_z = l$.

Решение. Из формул (47,8) и (47,10) ясно, что минимальное значение C_x при заданном C_y (т. е. заданном A_1) достигается, если равны нулю все A_n с $n \neq 1$. При этом

$$C_{x \min} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y^2. \quad (1)$$

Распределение же циркуляции по размаху крыла дается формулой

$$\Gamma = -\frac{4}{\pi l} U l_x C_y \sqrt{z(l-z)}. \quad (2)$$

Если длина размаха достаточно велика, то движение жидкости вокруг каждого сечения крыла приблизительно соответствует плоскому обтеканию бесконечно длинного крыла с таким профилем сечения. В этом случае можно утверждать, что распределение (2) циркуляции осуществляется при эллиптической в плане (в плоскости x, z) форме крыла с полуосями $l_x/2$ и $l/2$.

§ 48. Подъемная сила тонкого крыла

Задача о вычислении подъемной силы крыла сводится по теореме Жуковского к задаче о вычислении циркуляции Γ . Эта задача может быть решена в общем виде для хорошо обтекаемого

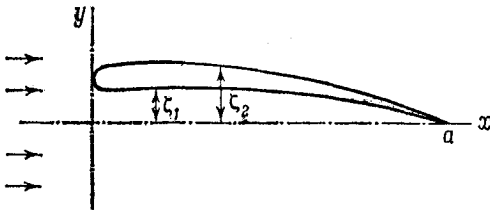


Рис. 37

тонкого крыла бесконечного размаха, с постоянным вдоль размаха профилем сечения (излагаемый ниже метод решения принадлежит *М. В. Келдышу* и *Л. И. Седову*, 1939).

Пусть $y = \xi_1(x)$ и $y = \xi_2(x)$ — уравнения нижней и верхней частей

контура сечения (рис. 37). Мы предполагаем, что этот профиль тонкий, слабо изогнутый и наклонен к направлению обтекания (оси x) под малым углом атаки; другими словами,

малы как сами ζ_1, ζ_2 , так и производные ζ'_1, ζ'_2 , т. е. нормаль к контуру направлена везде почти параллельно оси y . При этих условиях можно считать возмущение v скорости жидкости, вызываемое присутствием крыла, везде (кроме лишь малой области вблизи передней закругленной кромки крыла) малым по сравнению со скоростью натекания U . Граничное условие на поверхности крыла гласит $v_y/U = \zeta'$ при $y = \zeta$. В силу сделанных предположений можно потребовать его выполнения не при $y = \zeta$, а при $y = 0$. Тогда на отрезке оси абсцисс от $x = 0$ до $x = l_x \equiv a$ должно быть:

$$v_y = U\zeta'_2(x) \text{ при } y \rightarrow +0, \quad v_y = U\zeta'_1(x) \text{ при } y \rightarrow -0. \quad (48,1)$$

Имея в виду применить методы теории функций комплексного переменного, вводим комплексную скорость $dw/dz = v_x - iv_y$ (ср. § 10), представляющую собой аналитическую функцию переменной $z = x + iy$. В данном случае на отрезке $(0, a)$ оси абсцисс эта функция должна удовлетворять условию

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{dw}{dz} &= -U\zeta'_2(x) \text{ при } y \rightarrow +0, \\ \operatorname{Im} \frac{dw}{dz} &= -U\zeta'_1(x) \text{ при } y \rightarrow -0. \end{aligned} \quad (48,2)$$

Для решения поставленной задачи прежде всего представим искомое поле скоростей $v(x, y)$ в виде суммы $v = v^+ + v^-$ двух распределений, обладающих следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} v_x^-(x, -y) &= v_x^-(x, y), & v_y^-(x, -y) &= -v_y^-(x, y), \\ v_x^+(x, -y) &= -v_x^+(x, y), & v_y^+(x, -y) &= v_y^+(x, y). \end{aligned} \quad (48,3)$$

Эти свойства (для каждого из распределений v^- и v^+ в отдельности) не противоречат уравнениям непрерывности и потенциальности, и ввиду линейности задачи эти распределения можно искать независимо друг от друга.

Соответственно представится в виде суммы $w' = w'_+ + w'_-$ также и комплексная скорость, причем граничные условия на отрезке $(0, a)$ для обоих членов суммы гласят:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w'_+ |_{y \rightarrow +0} &= \operatorname{Im} w'_+ |_{y \rightarrow -0} = -\frac{U}{2} (\zeta'_1 + \zeta'_2), \\ \operatorname{Im} w'_- |_{y \rightarrow +0} &= -\operatorname{Im} w'_- |_{y \rightarrow -0} = \frac{U}{2} (\zeta'_1 - \zeta'_2). \end{aligned} \quad (48,4)$$

Функция w'_- может быть определена с помощью формулы Коши:

$$w'_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w'_-(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

где интегрирование производится в плоскости комплексного переменного ξ по окружности L малого радиуса с центром в точке $\xi = z$ (рис. 38). Контур L можно заменить окружностью C' бесконечно большого радиуса и обходимым по часовой стрелке контуром C ; последний может быть стянут к дважды пробегаемому отрезку $(0, a)$. Интеграл по C' обращается в нуль, так как $w'(z)$ исчезает на бесконечности. Интеграл же по C дает следующее выражение:

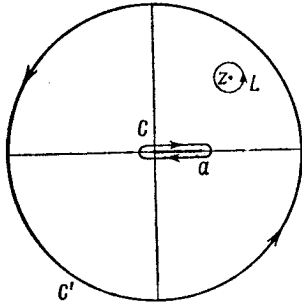


Рис. 38

$$w'_- = -\frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta'_2(\xi) - \zeta'_1(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (48,5)$$

При этом мы воспользовались предельными значениями (48,4) мнимой части w'_- на отрезке $(0, a)$ и тем, что согласно условиям симметрии (48,3) вещественная часть w'_- на этом отрезке не испытывает скачка.

Для нахождения же функции w'_+ надо применить формулу Коши не к самой этой функции, а к произведению $w'_+(z)g(z)$, где

$$g(z) = \sqrt{\frac{z}{z-a}},$$

причем при $z = x > a$ корень берется со знаком плюс. На отрезке $(0, a)$ вещественной оси функция $g(z)$ чисто мнимая и имеет разрыв:

$$g(x + i0) = -g(x - i0) = -i \sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Ввиду этих свойств функции $g(z)$ ясно, что мнимая часть произведения $g w'_+$ будет иметь на отрезке $(0, a)$ разрыв, а вещественная часть будет непрерывна, подобно тому как это имеет место у функции w'_- . Поэтому в точности аналогично выводу формулы (48,5) получим:

$$w'_+(z)g(z) = -\frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta'_1(\xi) + \zeta'_2(\xi)}{\xi - z} g(\xi + i0) d\xi.$$

Собирая полученные выражения, найдем окончательно следующую формулу, определяющую распределение скоростей

вокруг тонкого крыла:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{U}{2\pi i} \sqrt{\frac{z-a}{z}} \int_0^a \frac{\zeta'_1(\xi) + \zeta'_2(\xi)}{\xi-z} \sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}} d\xi - \\ - \frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta'_2(\xi) - \zeta'_1(\xi)}{\xi-z} d\xi. \quad (48,6)$$

Вблизи закругленной передней кромки (т. е. при $z \rightarrow 0$) это выражение, вообще говоря, обращается в бесконечность, что связано с непригодностью в этой области рассматриваемого приближения. Вблизи же задней заостренной кромки (т. е. при $z \rightarrow a$) первый член в (48,6) конечен; второй же член хотя, вообще говоря, и обращается в бесконечность, но лишь логарифмическим образом¹⁾. Эта логарифмическая особенность связана с характером принятого здесь приближения и исчезает при более точном рассмотрении; никакой же степенной расходимости, в согласии с условием Чаплыгина, на задней кромке не оказывается. Выполнение этого условия достигнуто соответствующим выбором использованной выше функции $g(z)$.

Формула (48,6) позволяет определить циркуляцию скорости Γ вокруг профиля крыла. Согласно общему правилу (см. § 10) Γ определяется вычетом функции $w'(z)$ относительно точки $z=0$, являющейся ее простым полюсом. Искомый вычет легко определить как коэффициент при $1/z$ в разложении функции $w'(z)$ по степеням $1/z$ вблизи бесконечно удаленной точки:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \dots,$$

причем для Γ получается простая формула

$$\Gamma = U \int_0^a (\zeta'_1 + \zeta'_2) \sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}} d\xi. \quad (48,7)$$

Отметим, что сюда входит только сумма функций ζ_1 и ζ_2 . Можно сказать, что подъемная сила не изменится, если заменить тонкое крыло изогнутой пластинкой, форма которой задается функцией $(\zeta_1 + \zeta_2)/2$.

Так, например, для крыла в виде плоской пластинки бесконечного размаха, наклоненной под малым углом атаки α , имеем $\zeta_1 = \zeta_2 = \alpha(a-x)$, и формула (48,7) дает $\Gamma = -\pi\alpha aU$. Коэффициент подъемной силы такого крыла равен

$$C_y = \frac{-\rho U \Gamma}{\frac{1}{2} \rho U^2 a} = 2\pi\alpha.$$

¹⁾ Эта расходимость отсутствует, если вблизи задней кромки ζ_1 и ζ_2 обращаются в нуль как $(a-x)^k$, $k > 1$, т. е. если угловая точка контура у заднего его края есть точка возврата.