

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ЖИДКОСТИ

§ 49. Общее уравнение переноса тепла

В конце § 2 было указано, что полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять уравнений. Для жидкости, в которой имеют место процессы теплопроводности и внутреннего трения, одним из этих уравнений является по-прежнему уравнение непрерывности; уравнения Эйлера заменяются уравнениями Навье — Стокса. Что же касается пятого уравнения, то для идеальной жидкости им является уравнение сохранения энтропии (2,6). В вязкой жидкости это уравнение, разумеется, не имеет места, поскольку в ней происходят необратимые процессы диссипации энергии.

В идеальной жидкости закон сохранения энергии выражается уравнением (6,1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right].$$

Слева стоит скорость изменения энергии единицы объема жидкости, а справа — дивергенция плотности потока энергии. В вязкой жидкости закон сохранения энергии, конечно, тоже имеет место: изменение полной энергии жидкости в некотором объеме (в 1 сек.) должно быть по-прежнему равно полному потоку энергии через границы этого объема. Однако плотность потока энергии выглядит теперь иным образом. Прежде всего помимо потока $\rho \mathbf{v} (v^2/2 + w)$, связанного с простым переносом массы жидкости при ее движении, имеется еще поток, связанный с процессами внутреннего трения. Этот второй поток выражается вектором $-(\mathbf{v}\sigma')$ с компонентами $v_i \sigma'_{ik}$ (см. § 16). Этим, однако, не исчерпываются все дополнительные члены в потоке энергии.

Если температура жидкости не постоянна вдоль ее объема, то наряду с обоеими указанными механизмами переноса энергии будет происходить перенос тепла также и посредством так называемой *теплопроводности*. Под этим подразумевается непосредственный молекулярный перенос энергии из мест с более высокой в места с более низкой температурой. Он не связан с макроскопическим движением и происходит также и в неподвижной жидкости.

Обозначим через \mathbf{q} плотность потока тепла, переносимого посредством теплопроводности. Поток \mathbf{q} связан некоторым обра-

зом с изменением температуры вдоль жидкости. Эту зависимость можно написать сразу в тех случаях, когда градиент температуры в жидкости не слишком велик; практически в явлениях теплопроводности мы почти всегда имеем дело именно с такими случаями. Мы можем тогда разложить q в ряд по степеням градиента температуры, ограничившись первыми членами разложения. Постоянный член в этом разложении, очевидно, исчезает, поскольку q должно обращаться в нуль вместе с ∇T . Таким образом, получаем:

$$q = -\kappa \nabla T. \quad (49,1)$$

Постоянная κ называется *теплопроводностью*. Она всегда положительна, — это видно уже из того, что поток энергии должен быть направлен из мест с более высокой в места с более низкой температурой, т. е. q и ∇T должны иметь противоположные направления. Коэффициент κ является, вообще говоря, функцией температуры и давления.

Таким образом, полная плотность потока энергии в жидкости при наличии вязкости и теплопроводности равна сумме

$$\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (v\sigma') - \kappa \nabla T.$$

Соответственно этому общий закон сохранения энергии выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \operatorname{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (v\sigma') - \kappa \nabla T \right]. \quad (49,2)$$

Это уравнение можно было бы выбрать в качестве последнего из полной системы гидродинамических уравнений вязкой жидкости. Удобно, однако, придать ему другой вид, преобразовав его с помощью уравнений движения. Для этого вычислим производную по времени от энергии единицы объема жидкости, исходя из уравнений движения. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Подставляя сюда $\partial \rho / \partial t$ из уравнения непрерывности и $\partial v / \partial t$ из уравнения Навье — Стокса, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = & - \frac{v^2}{2} \operatorname{div} \rho v - \rho (v \nabla) \frac{v^2}{2} - v \nabla p + v_l \frac{\partial \sigma'_{lk}}{\partial x_k} + \\ & + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \operatorname{div} \rho v. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь термодинамическим соотношением

$$d\varepsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

откуда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Подставляя это и вводя тепловую функцию $w = \varepsilon + p/\rho$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = & - \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho (\mathbf{v} \nabla) \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \nabla p + \\ & + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Далее, из термодинамического соотношения $dw = T ds + dp/\rho$ имеем:

$$\nabla p = \rho \nabla w - \rho T \nabla s.$$

Последний же член в правой стороне равенства можно написать в виде

$$v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{v} \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Подставляя эти выражения, прибавляя и вычитая $\operatorname{div}(\kappa \nabla T)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = & - \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\mathbf{v} \sigma') - \kappa \nabla T \right] + \\ & + \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}(\kappa \nabla T). \quad (49,3) \end{aligned}$$

Сравнив это выражение для производной от энергии единицы объема с выражением (49,2), получим следующее уравнение:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa \nabla T). \quad (49,4)$$

Мы будем называть это уравнение *общим уравнением переноса тепла*. При отсутствии вязкости и теплопроводности его правая сторона обращается в нуль и получается уравнение сохранения энтропии (2,6) идеальной жидкости.

Нужно обратить внимание на следующее истолкование уравнения (49,4). Стоящее слева выражение есть не что иное, как умноженная на ρT полная производная от энтропии по времени ds/dt . Последняя определяет изменение энтропии данной передвигающейся в пространстве единицы массы жидкости; $T ds/dt$ есть, следовательно, количество тепла, получаемого этой единицей массы в единицу времени, а $\rho T ds/dt$ — количество тепла, отнесенное к единице объема. Из (49,4) мы видим поэтому, что

количество тепла, получаемого единицей объема жидкости, есть

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div} (\kappa \nabla T).$$

Первый член здесь представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря вязкости, а второй есть тепло, приносимое в рассматриваемый объем посредством теплопроводности.

Раскроем первый член в правой стороне уравнения (49,4), подставив в него выражение (15,3) для σ'_{ik} . Имеем:

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Легко проверить, что первый член может быть написан в виде

$$\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2,$$

а во втором имеем:

$$\zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2.$$

Таким образом, уравнение (49,4) приобретает вид

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (49,5)$$

В результате необратимых процессов теплопроводности и внутреннего трения энтропия жидкости возрастает. Речь идет при этом, конечно, не об энтропии каждого элемента объема жидкости в отдельности, а о полной энтропии всей жидкости, равной интегралу $\int \rho s dV$. Изменение энтропии в единицу времени определяется производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} dV.$$

С помощью уравнения непрерывности и уравнения (49,5) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \operatorname{div} \rho \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \nabla s + \frac{1}{T} \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \\ &+ \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

Первые два члена дают в сумме $-\operatorname{div} (\rho s \mathbf{v})$. Интеграл по объему от этого члена преобразуется в интеграл от потока энтропии $\rho s \mathbf{v}$ по поверхности. Рассматривая неограниченный объем жидкости,

покоящейся на бесконечности, мы можем стремиться граничную поверхность на бесконечность; тогда подынтегральное выражение в поверхностном интеграле обращается в нуль и интеграл исчезает. Интеграл от третьего члена преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{1}{T} \operatorname{div} (\kappa \nabla T) dV = \int \operatorname{div} \left(\frac{\kappa \nabla T}{T} \right) dV + \int \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} dV.$$

Считая, что температура жидкости на бесконечности достаточно быстро стремится к постоянному пределу, преобразуем первый интеграл в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, на которой $\nabla T = 0$, так что интеграл тоже исчезает.

В результате получается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = & \int \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV + \\ & + \int \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV. \quad (49,6) \end{aligned}$$

Первый член представляет собой увеличение энтропии благодаря теплопроводности, а остальные два — увеличение энтропии, обусловленное внутренним трением.

Энтропия может только возрастать, т. е. сумма (49,6) должна быть положительна. С другой стороны, в каждом из членов этой суммы подынтегральное выражение может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю двух других интегралов. Поэтому каждый из этих интегралов должен быть всегда положительным. Отсюда следует наряду с известной уже нам положительностью κ и η также и положительность второго коэффициента вязкости ζ .

При выводе формулы (49,1) молчаливо подразумевалось, что поток тепла зависит только от градиента температуры и не зависит от градиента давления. Это предположение, априори не очевидное, может быть оправдано теперь следующим образом. Если бы в \mathbf{q} входил член, пропорциональный ∇p , то в выражении (49,6) для изменения энтропии прибавился бы еще член, содержащий под интегралом произведение $\nabla p \nabla T$. Поскольку это последнее может быть как положительным, так и отрицательным, то и производная от энтропии по времени не была бы существенно положительной, что невозможно.

Наконец, необходимо уточнить изложенные выше рассуждения еще и в следующем отношении. Строго говоря, в термодинамически неравновесной системе, каковой является жидкость при наличии в ней градиентов скорости и температуры, обычные определения термодинамических величин теряют смысл и должны быть уточнены. Подразумевавшиеся нами здесь определения заключаются прежде всего в том, что ρ , ϵ и \mathbf{v} определяются по-прежнему: ρ и $\rho \epsilon$ есть масса и внутренняя энергия, заключен-

ные в единице объема, а \mathbf{v} есть импульс единицы массы жидкости. Остальные же термодинамические величины определяются затем как те функции от ρ и ϵ , которыми они являются в состоянии теплового равновесия. При этом, однако, энтропия $s = s(\epsilon, \rho)$ уже не будет истинной термодинамической энтропией: интеграл $\int \rho s dV$ не будет, строго говоря, той величиной, кото-

рая должна возрастать со временем. Тем не менее, легко видеть, что при малых градиентах скорости и температуры в принятом нами здесь приближении s совпадает с истинной энтропией.

Действительно, при наличии градиентов в энтропии появляются, вообще говоря, связанные с ними дополнительные (по отношению к $s(\rho, \epsilon)$) члены. На изложенных выше результатах, однако, могли бы сказаться лишь линейные по градиентам члены (например, член, пропорциональный скаляру $\text{div } \mathbf{v}$). Такие члены неизбежно могли бы принимать как положительные, так и отрицательные значения. Между тем они должны быть существенно отрицательными, так как равновесное значение $s = s(\rho, \epsilon)$ является максимальным возможным. Поэтому разложение энтропии по степеням малых градиентов может содержать (помимо нулевого члена) лишь члены начиная со второго порядка.

Аналогичные замечания должны были быть по существу сделаны уже в § 15 (ср. примечание на стр. 66), так как уже наличие градиента скорости является термодинамической неравновесностью. Именно, под давлением p , которое входит в выражение для тензора плотности потока импульса в вязкой жидкости, следует понимать ту функцию $p = p(\epsilon, \rho)$, которой она является в состоянии теплового равновесия. При этом p не будет уже, строго говоря, давлением в обычном смысле слова, т. е. не будет совпадать с нормальной силой, действующей на элемент поверхности. В отличие от того, что было сказано выше об энтропии, здесь различие проявляется уже в величинах первого порядка по малому градиенту: мы видели, что в нормальной компоненте силы появляется наряду с p еще и член, пропорциональный $\text{div } \mathbf{v}$ (в несжимаемой жидкости этот член отсутствует и там разница появляется лишь в членах более высокого порядка).

Таким образом, три коэффициента η , ζ , κ , фигурирующие в системе уравнений движения вязкой теплопроводящей жидкости, полностью определяют гидродинамические свойства жидкости в рассматриваемом, всегда применяемом приближении (т. е. при пренебрежении производными высших порядков по координатам от скорости, температуры и т. п.). Введение в уравнения каких-либо дополнительных членов (например, введение в плотность потока массы членов, пропорциональных градиентам плотности или температуры) лишено физического смысла и означало

бы в лучшем случае лишь изменение определения основных величин; в частности, скорость не совпадала бы с импульсом единицы массы жидкости¹⁾.

§ 50. Теплопроводность в несжимаемой жидкости

Общее уравнение теплопроводности в форме (49,4) или (49,5) может быть в различных случаях значительно упрощено.

Если скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Однако неравномерно нагретая жидкость не является все же при этом вполне несжимаемой в том смысле, как это понималось выше. Дело в том, что плотность меняется еще и под влиянием изменения температуры; этим изменением плотности, вообще говоря, нельзя пренебречь, и потому даже при достаточно малых скоростях плотность неравномерно нагретой жидкости все же нельзя считать постоянной. При определении производных от термодинамических величин в этом случае надо, следовательно, считать постоянным давление, а не плотность. Так, имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \nabla T,$$

и поскольку $T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$ есть теплоемкость c_p при постоянном давлении, то

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T \nabla s = c_p \nabla T.$$

¹⁾ В худшем же случае введение таких членов может вообще нарушить соблюдение необходимых законов сохранения. Следует иметь в виду, что при любом определении величин плотность потока массы j во всяком случае должна совпадать с импульсом единицы объема жидкости. Действительно, плотность потока j определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0;$$

умножая его на r и интегрируя по всему занятому жидкостью объему, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho r dV = \int j dV,$$

а поскольку интеграл $\int \rho r dV$ определяет положение центра инерции данной массы жидкости, то ясно, что интеграл $\int j dV$ есть ее импульс.