бы в лучшем случае лишь изменение определения основных величин; в частности, скорость не совпадала бы с импульсом единицы массы жидкости[1]).

§ 50. Теплопроводность в несжимаемой жидкости

Общее уравнение теплопроводности в форме (49,4) или (49,5) может быть в различных случаях значительно упрощено.

Если скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Однако неравномерно нагретая жидкость не является все же при этом вполне несжимаемой в том смысле, как это понималось выше. Дело в том, что плотность меняется еще и под влиянием изменения температуры; этим изменением плотности, вообще говоря, нельзя пренебречь, и потому даже при достаточно малых скоростях плотность неравномерно нагретой жидкости все же нельзя считать постоянной. При определении производных от термодинамических величин в этом случае надо, следовательно, считать постоянным давление, а не плотность. Так, имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\frac{\partial T}{\partial t},\qquad \nabla s=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\nabla T,$$

и поскольку $T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ есть теплоемкость c_p при постоянном давлении, то

$$T\frac{\partial s}{\partial t}=c_p\frac{\partial T}{\partial t},\qquad T\nabla s=c_p\nabla T.$$

---

[1]) В худшем же случае введение таких членов может вообще нарушить соблюдение необходимых законов сохранения. Следует иметь в виду, что при любом определении величин плотность потока массы $\mathbf{j}$ во всяком случае должна совпадать с импульсом единицы объема жидкости. Действительно, плотность потока $\mathbf{j}$ определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0;$$

умножая его на $\mathbf{r}$ и интегрируя по всему занятому жидкостью объему, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\mathbf{r}\,dV=\int\mathbf{j}\,dV,$$

а поскольку интеграл $\int\rho\mathbf{r}\,dV$ определяет положение центра инерции данной массы жидкости, то ясно, что интеграл $\int\mathbf{j}\,dV$ есть ее импульс.

Уравнение (49,4) принимает вид

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\,\nabla T\right)=\operatorname{div}(\varkappa\nabla T)+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{50,1}$$

Для того чтобы в уравнениях движения неравномерно нагретой жидкости можно было считать плотность постоянной, необходимо (помимо малости отношения скорости жидкости к скорости звука), чтобы имеющиеся в жидкости разности температур были достаточно малы; подчеркнем, что здесь речь идет именно об абсолютных значениях разностей температур, а не о градиенте температуры. Тогда жидкость можно считать несжимаемой в том же смысле, как это подразумевалось раньше; в частности, уравнение непрерывности будет выглядеть просто как $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$. Считая разности температур малыми, мы будем пренебрегать также и температурным изменением величин η, $\varkappa$, c_p, т. е. будем считать их постоянными. Написав член $\sigma'_{ik}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ в том виде, как это сделано в (49,5), мы получим в результате уравнение переноса тепла в несжимаемой жидкости в следующем сравнительно простом виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\,\nabla T=\chi\Delta T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \tag{50,2}$$

где $\nu=\eta/\rho$ — кинематическая вязкость, а вместо $\varkappa$ введена *температуропроводность*

$$\chi=\varkappa/\rho c_p. \tag{50,3}$$

В особенности просто выглядит уравнение переноса тепла в неподвижной жидкости, где перенос энергии обязан целиком теплопроводности. Опуская в (50,2) члены, содержащие скорость, получаем просто

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\Delta T. \tag{50,4}$$

Это уравнение называется в математической физике *уравнением теплопроводности* или *уравнением Фурье*. Оно может быть выведено, разумеется, и гораздо более простым образом, без помощи общего уравнения переноса тепла в движущейся жидкости. Согласно закону сохранения энергии количество тепла, поглощающееся в некотором объеме в единицу времени, должно быть равно полному потоку тепла, втекающего в этот объем через ограничивающую его поверхность. Как мы знаем, такой закон сохранения может быть выражен в виде уравнения непрерывности для количества тепла. Это уравнение получается приравниванием количества тепла, поглощающегося в единице объема жидкости в единицу времени, дивергенции плотности потока тепла, взятой с обратным знаком. Первое из них равно $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$; здесь должна быть взята теплоемкость c_p, так как вдоль неподвижной жидкости давление должно быть, разумеется, постоянным. Приравняв это выражение $-\operatorname{div}\mathbf{q} = \varkappa\Delta T$, получим как раз уравнение (50,4).

Необходимо отметить, что применимость уравнения теплопроводности (50,4) к жидкостям практически сильно ограничена. Дело в том, что в жидкостях, реально находящихся в поле тяжести, уже малый градиент температуры приводит в большинстве случаев к возникновению заметного движения (так называемая конвекция; см. § 56). Поэтому реально можно иметь дело с неравномерным распределением температуры в неподвижной жидкости, разве только, если градиент температуры направлен противоположно силе тяжести или же если жидкость очень вязкая. Тем не менее, изучение уравнения теплопроводности в форме (50,4) весьма существенно, так как уравнением такого вида описываются процессы теплопроводности в твердых телах. Имея это в виду, мы займемся здесь и в §§ 51, 52 более подробным его исследованием.

Если распределение температуры в неравномерно нагретой неподвижной среде поддерживается (посредством некоторых внешних источников тепла) постоянным во времени, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta T = 0. \tag{50,5}$$

Таким образом, стационарное распределение температуры в неподвижной среде описывается уравнением Лапласа. В более общем случае, когда коэффициент $\varkappa$ нельзя считать постоянным, вместо (50,5) имеем уравнение

$$\operatorname{div}(\varkappa \nabla T) = 0. \tag{50,6}$$

Если в жидкости имеются посторонние источники тепла, то к уравнению теплопроводности должен быть добавлен соответствующий дополнительный член (таким источником тепла может, например, являться нагревание электрическим током). Пусть Q есть количество тепла, выделяемое этими источниками в единице объема жидкости в единицу времени; Q является, вообще говоря, функцией от координат и от времени. Тогда условие баланса тепла, т. е. уравнение теплопроводности, напишется в виде

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa\Delta T + Q. \tag{50,7}$$

Напишем граничные условия для уравнения теплопроводности, которые должны иметь место на границе двух сред. Прежде всего, на границе должны быть равными температуры обеих сред:

$$T_1 = T_2. \tag{50,8}$$

Кроме того, поток тепла, выходящего из одной среды, должен быть равен потоку, входящему во вторую среду. Выбирая систему координат, в которой данный участок границы покоится, можно написать это условие в виде

$$\varkappa_1 \nabla T_1 \, d\mathbf{f} = \varkappa_2 \nabla T_2 \, d\mathbf{f}$$

для каждого элемента $d\mathbf{f}$ поверхности раздела. Написав

$$\nabla T \, d\mathbf{f} = \frac{\partial T}{\partial n} df,$$

где $\partial T/\partial n$ — производная от T по направлению нормали к поверхности, получим граничное условие в виде

$$\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \qquad (50,9)$$

Если на поверхности раздела имеются посторонние источники тепла, выделяющие количество тепла $Q^{(s)}$ на единице площади в единицу времени, то вместо условия (50,9) надо написать:

$$\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}. \qquad (50,10)$$

В физических задачах о распределении температуры при наличии источников тепла интенсивность последних обычно сама задается в виде функции температуры. Если функция $Q(T)$ достаточно быстро возрастает с увеличением T, то установление стационарного распределения температуры в теле, границы которого поддерживаются при заданных условиях (например, при заданной температуре), может оказаться невозможным. Теплоотвод через внешнюю поверхность тела пропорционален некоторому среднему значению разности температур $T - T_0$ тела и внешней среды вне зависимости от закона тепловыделения внутри тела. Ясно, что если последнее достаточно быстро возрастает с температурой, то теплоотвод может оказаться недостаточным для осуществления равновесного состояния.

В этих условиях может возникнуть *тепловой взрыв*: если скорости экзотермической реакции горения достаточно быстро возрастают с температурой, то при невозможности стационарного распределения возникают быстрое нестационарное разогревание вещества и ускорение реакции (*Н. Н. Семенов*, 1923). Скорость (а с ней и интенсивность выделения тепла) взрывных реакций горения зависит от температуры в основном пропорционально множителю $\exp(-U/T)$ с большой энергией активации U. Для исследования условий возникновения теплового взрыва следует рассматривать ход реакции при сравнительно незначительном разогревании вещества и соответственно этому разложить

$$\frac{1}{T} \approx \frac{1}{T_0} - \frac{T - T_0}{T_0^2},$$

где T_0 — внешняя температура. Таким образом, задача сводится к исследованию уравнения теплопроводности с объемной интенсивностью источников тепла вида

$$Q = Q_0 \exp\{\alpha(T - T_0)\} \tag{50,11}$$

(*Д. А. Франк-Каменецкий*, 1939), — см. задачу 1.

Задачи

1. В слое вещества между двумя параллельными плоскостями распределены источники тепла с объемной интенсивностью (50,11). Граничные плоскости поддерживаются при постоянной температуре. Найти условие, определяющее возможность установления стационарного распределения температуры (*Д. А. Франк-Каменецкий*, 1939) [1].

Решение. Уравнение стационарной теплопроводности в данном случае гласит:

$$\varkappa \frac{d^2T}{dx^2} = -Q_0 e^{\alpha(T-T_0)}$$

с граничными условиями $T = T_0$ при $x = 0$ и $x = 2l$ ($2l$ — ширина слоя). Вводим безразмерные переменные $\tau = \alpha(T - T_0)$ и $\xi = x/l$; тогда

$$\tau'' + \lambda e^{\tau} = 0, \qquad \lambda = \frac{Q_0 \alpha l^2}{\varkappa}.$$

Интегрируя это уравнение (умножив его на $2\tau'$) один раз, найдем:

$$\tau'^2 = 2\lambda\,(e^{\tau_0} - e^{\tau}),$$

где τ_0 — постоянная. Последняя представляет собой, очевидно, максимальное значение τ, которое ввиду симметрии задачи должно достигаться посередине слоя, т. е. при $\xi = 1$. Поэтому вторичное интегрирование с учетом условия $\tau = 0$ при $\xi = 0$ дает

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} = \int_0^1 d\xi = 1.$$

Произведя интегрирование, получим

$$e^{-\tau_0/2}\,\mathrm{Arch}\, e^{\tau_0/2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \tag{1}$$

Определяемая этим равенством функция $\lambda(\tau_0)$ имеет максимум $\lambda = \lambda_{кр}$ при определенном значении $\tau_0 = \tau_{0\,кр}$; если $\lambda > \lambda_{кр}$, то удовлетворяющего граничным условиям решения не существует [2]. Численные значения: $\lambda_{кр} = 0{,}88$, $\tau_{0кр} = 1{,}2$ [3].

2. В неподвижную жидкость, в которой поддерживается постоянный градиент температуры, погружен шар. Определить возникающее стационарное распределение температуры в жидкости и шаре.

---

[1]) Подробное изложение относящихся сюда вопросов см. в книге: *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.

[2]) Из двух корней уравнения (1) при $\lambda < \lambda_{кр}$ устойчивому распределению температуры соответствует лишь меньший.

[3]) Аналогичные значения для сферической области (с ее радиусом в качестве длины l) равны $\lambda_{кр} = 3{,}32$, $\tau_{0\,кр} = 1{,}47$, а для бесконечного цилиндра $\lambda_{кр} = 2{,}00$ $\tau_{0\,кр} = 1{,}36$.

Решение. Распределение температуры определяется во всем пространстве уравнением $\Delta T = 0$ с граничными условиями

$$T_1 = T_2, \quad \varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$$

при $r = R$ (R — радиус шара; величины с индексами 1 и 2 относятся соответственно к шару и жидкости) и условием $\nabla T = \mathbf{A}$ на бесконечности ($\mathbf{A}$ — заданный градиент температуры). В силу симметрии условий задачи $\mathbf{A}$ есть единственный вектор, которым должно определяться искомое решение. Такими решениями уравнения Лапласа являются $\mathrm{const}\,\mathbf{Ar}$ и $\mathrm{const}\,\mathbf{A}\nabla(1/r)$. Замечая, кроме того, что решение должно оставаться конечным в центре шара, ищем температуры T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = c_1 \mathbf{Ar}, \qquad T_2 = c_2 \mathbf{A} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{Ar};$$

постоянные c_1 и c_2 определяются из условий при $r = R$, и в результате находим:

$$T_1 = \frac{3\varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \mathbf{Ar}, \qquad T_2 = \left[1 + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] \mathbf{Ar}.$$

§ 51. Теплопроводность в неограниченной среде

Рассмотрим теплопроводность в неограниченной неподвижной среде. Наиболее общей постановкой задачи является следующая. В начальный момент времени $t = 0$ задано распределение температуры во всем пространстве:

$$T = T_0(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где $T_0(\mathbf{r})$ — заданная функция координат. Требуется определить распределение температуры во все последующие моменты времени.

Разложим искомую функцию $T(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье по координатам:

$$T(\mathbf{r}, t) = \int T_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad T_{\mathbf{k}}(t) = \int T(\mathbf{r}, t)\, e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x. \quad (51,1)$$

Для каждой фурье-компоненты температуры, $T_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}$, уравнение (50,4) дает:

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} = 0,$$

откуда находим зависимость $T_{\mathbf{k}}$ от времени:

$$T_{\mathbf{k}} = T_{0\mathbf{k}} e^{-k^2 \chi t}.$$

Поскольку при $t = 0$ должно быть $T = T_0(\mathbf{r})$, то ясно, что $T_{0\mathbf{k}}$ представляет собой коэффициенты фурье-разложения функции T_0:

$$T_{0\mathbf{k}} = \int T_0(\mathbf{r}')\, e^{-i\mathbf{kr}'}\, d^3x'.$$