Решение. Распределение температуры определяется во всем пространстве уравнением $\Delta T = 0$ с граничными условиями

$$T_1 = T_2, \quad \varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$$

при $r = R$ ($R$ — радиус шара; величины с индексами 1 и 2 относятся соответственно к шару и жидкости) и условием $\nabla T = \mathbf{A}$ на бесконечности ($\mathbf{A}$ — заданный градиент температуры). В силу симметрии условий задачи $\mathbf{A}$ есть единственный вектор, которым должно определяться искомое решение. Такими решениями уравнения Лапласа являются $\mathrm{const}\,\mathbf{Ar}$ и $\mathrm{const}\,\mathbf{A}\nabla(1/r)$. Замечая, кроме того, что решение должно оставаться конечным в центре шара, ищем температуры $T_1$ и $T_2$ в виде

$$T_1 = c_1 \mathbf{Ar}, \qquad T_2 = c_2 \mathbf{A} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{Ar};$$

постоянные $c_1$ и $c_2$ определяются из условий при $r = R$, и в результате находим:

$$T_1 = \frac{3\varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \mathbf{Ar}, \qquad T_2 = \left[1 + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] \mathbf{Ar}.$$

## § 51. Теплопроводность в неограниченной среде

Рассмотрим теплопроводность в неограниченной неподвижной среде. Наиболее общей постановкой задачи является следующая. В начальный момент времени $t = 0$ задано распределение температуры во всем пространстве:

$$T = T_0(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где $T_0(\mathbf{r})$ — заданная функция координат. Требуется определить распределение температуры во все последующие моменты времени.

Разложим искомую функцию $T(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье по координатам:

$$T(\mathbf{r}, t) = \int T_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad T_{\mathbf{k}}(t) = \int T(\mathbf{r}, t)\, e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x. \quad (51,1)$$

Для каждой фурье-компоненты температуры, $T_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}$, уравнение (50,4) дает:

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} = 0,$$

откуда находим зависимость $T_{\mathbf{k}}$ от времени:

$$T_{\mathbf{k}} = T_{0\mathbf{k}} e^{-k^2 \chi t}.$$

Поскольку при $t = 0$ должно быть $T = T_0(\mathbf{r})$, то ясно, что $T_{0\mathbf{k}}$ представляет собой коэффициенты фурье-разложения функции $T_0$:

$$T_{0\mathbf{k}} = \int T_0(\mathbf{r}')\, e^{-i\mathbf{kr}'}\, d^3x'.$$

Таким образом, находим:

$$T=\int T_0(\mathbf{r}')\,e^{-k^2\chi t}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,d^3x'\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Интеграл по $d^3k$ разбивается на произведение трех одинаковых интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\xi^2}\cos\beta\xi\,d\xi=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}e^{-\beta^2/4\alpha},$$

где $\xi$ — одна из компонент вектора $\mathbf{k}$ (аналогичный интеграл с $\sin$ вместо $\cos$ исчезает в силу нечетности функции $\sin$). В результате получаем окончательно следующее выражение:

$$T(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{8\,(\pi\chi t)^{3/2}}\int T_0(\mathbf{r}')\exp\left\{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4\chi t}\right\}d^3x'. \qquad (51{,}2)$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя распределение температуры в любой момент времени по ее заданному распределению в начальный момент.

Если начальное распределение температуры зависит только от одной координаты $x$, то, произведя в (51,2) интегрирование по $dy'dz'$, получим:

$$T(x,\ t)=\frac{1}{2\,(\pi\chi t)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0(x')\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\}dx'. \qquad (51{,}3)$$

Пусть при $t=0$ температура равна нулю во всем пространстве, за исключением одной точки (начала координат), в которой она принимает бесконечно большое значение, но так, что полное количество тепла, пропорциональное интегралу $\int T_0(\mathbf{r})\,d^3x$, остается конечным. Такое распределение можно представить $\delta$-функцией:

$$T_0(\mathbf{r})=\mathrm{const}\cdot\delta(\mathbf{r}). \qquad (51{,}4)$$

Интегрирование в формуле (51,2) сводится тогда просто к замене $\mathbf{r}'$ нулем, в результате чего получается:

$$T(\mathbf{r},\ t)=\mathrm{const}\frac{1}{8\,(\pi\chi t)^{3/2}}e^{-r^2/4\chi t}. \qquad (51{,}5)$$

С течением времени температура в точке $r=0$ падает как $t^{-3/2}$. Одновременно повышается температура в окружающем пространстве, причем область заметно отличной от нуля температуры постепенно расширяется (рис. 39). Ход этого расширения определяется в основном экспоненциальным множителем в (51,5): порядок величины $l$ размеров этой области дается выражением

$$l \sim \sqrt{\chi t}, \tag{51,6}$$

т. е. растет пропорционально корню из времени.

Аналогично, если в начальный момент времени конечное количество тепла сконцентрировано в плоскости $x = 0$, то в последующее время распределение температуры определится формулой

$$T(x,\ t) = \text{const}\frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}}e^{-x^2/4\chi t}. \tag{51,7}$$

Формулу (51,6) можно истолковать с несколько иной точки зрения. Пусть $l$ есть порядок величины размеров тела. Тогда можно утверждать, что если это тело было неравномерно нагрето, то порядок величины времени $\tau$, в течение которого температуры в разных точках тела заметно выравнятся, равен

$$\tau \sim l^2/\chi. \tag{51,8}$$

Время $\tau$, которое можно назвать временем релаксации для процесса теплопроводности, пропорционально квадрату размеров тела и обратно пропорционально коэффициенту температуропроводности.

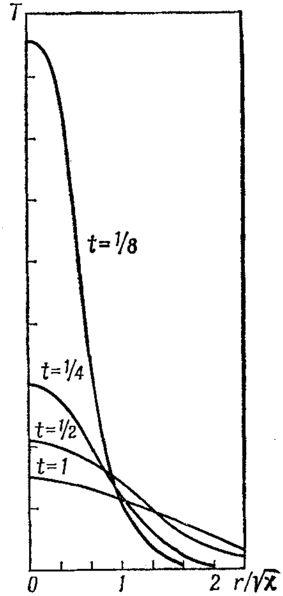

Рис. 39

Процесс теплопроводности, описываемый полученными здесь формулами, обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на все пространство. Так, из формулы (51,5) видно, что тепло из точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в нуль лишь асимптотически на бесконечности. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от температуры температуропроводностью $\chi$, если только эта зависимость не приводит к обращению $\chi$ в нуль в какой-либо области пространства. Если же $\chi$ есть функция температуры, убывающая и обращающаяся в нуль вместе с нею, то это приводит к такому замедлению процесса распространения тепла, в результате которого влияние любого теплового возмущения будет простираться в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства; речь идет о распространении тепла в среду, температуру которой (вне области влияния) можно считать равной нулю (*Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец*, 1950; им же принадлежит решение приведенных ниже задач).

**Задачи**

1. Теплоемкость и теплопроводность среды — степенные функции температуры, а ее плотность постоянна. Определить закон обращения температуры в нуль вблизи границы области, до которой в данный момент распространялось тепло из некоторого произвольного источника; вне этой области температура равна нулю.

Решение. Если $\varkappa$ и $c_p$ — степенные функции температуры, то то же самое относится к температуропроводности $\chi$ и к тепловой функции $w = \int c_p\, dT$ (постоянный член в $w$ опускаем). Поэтому можно написать $\chi = aW^n$, где посредством $W = \rho w$ мы обозначили тепловую функцию единицы объема среды. Тогда уравнение теплопроводности

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\varkappa \nabla T)$$

приобретет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \operatorname{div}(W^n \nabla W). \tag{1}$$

В течение небольшого интервала времени малый участок границы можно считать плоским, а скорость его перемещения в пространстве $v$ — постоянной. Соответственно этому ищем решение уравнения (1) в виде $W = W(x - vt)$, где $x$ — координата в перпендикулярном к границе направлении. Имеем:

$$-v \frac{\partial W}{\partial x} = a \frac{d}{dx}\left(W^n \frac{dW}{dx}\right), \tag{2}$$

откуда после двукратного интегрирования находим следующий закон обращения $W$ в нуль:

$$W \propto |x|^{1/n}, \tag{3}$$

где $|x|$ — расстояние от границы нагретой области. В то же время этим подтверждается вывод о наличии границы нагретой области (вне которой $W$, а с ней и $T$ равны нулю), если показатель $n > 0$. Если $n \leqslant 0$, то уравнение (2) не имеет решений, обращающихся в нуль на конечном расстоянии, т. е. тепло распределено в каждый момент по всему пространству.

2. В той же среде в начальный момент времени в плоскости $x = 0$ сконцентрировано количество тепла, равное (будучи отнесено к единице площади) $Q$, а в остальном пространстве $T = 0$. Определить распределение температуры в последующие моменты времени.

Решение. В одномерном случае уравнение (1) гласит:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(W^n \frac{\partial W}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Из имеющихся в нашем распоряжении параметров $Q$ и $a$ и переменных $x$, $t$ можно составить лишь одну безразмерную комбинацию:

$$\xi = \frac{x}{(Q^n a t)^{1/(2+n)}} \tag{5}$$

($Q$ и $a$ имеют размерность соответственно эрг/см$^2$ и см$^2$/сек (см$^3$/эрг)$^n$). Поэтому искомая функция $W(x, t)$ должна иметь вид

$$W = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{1/(2+n)} f(\xi), \tag{6}$$

где безразмерная функция $f(\xi)$ умножена на величину, имеющую размерность эрг/см³. После этой подстановки уравнение (4) дает

$$(2+n)\frac{d}{d\xi}\left(f^n\frac{df}{d\xi}\right)+\xi\frac{df}{d\xi}+f=0.$$

Это уравнение в полных производных имеет простое решение, удовлетворяющее условиям задачи:

$$f(\xi)=\left[\frac{n}{2(2+n)}\left(\xi_0^2-\xi^2\right)\right]^{1/n}, \tag{7}$$

где $\xi_0$ — постоянная интегрирования.

При $n>0$ эта формула дает распределение температуры в области между границами $x=\pm x_0$, определяющимися равенством $\xi=\pm\xi_0$; вне этих границ $W=0$. Отсюда следует, что границы нагретой области расширяются со временем по закону

$$x_0=\text{const}\, t^{1/(2+n)}.$$

Постоянная $\xi_0$ определяется условием постоянства полного количества тепла:

$$Q=\int_{-x_0}^{x_0} W\,dx=Q\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

откуда получается

$$\xi_0^{2+n}=\frac{(2+n)^{1+n}\,2^{1-n}}{n\pi^{n/2}}\,\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma^n(1/n)}. \tag{9}$$

При $n=-\nu<0$ напишем решение в виде

$$f(\xi)=\left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}\left(\xi_0^2+\xi^2\right)\right]^{-1/\nu}. \tag{10}$$

Здесь тепло распределено по всему пространству, причем на больших расстояниях $W$ убывает по степенному закону: $W\sim x^{-2/\nu}$. Это решение применимо лишь при $\nu<2$; при $\nu\geqslant 2$ нормировочный интеграл (8) (который берется теперь в пределах $\pm\infty$) расходится, что физически означает мгновенный уход тепла на бесконечное расстояние. При $\nu<2$ постоянная $\xi_0$ в (10) равна

$$\xi_0^{2-\nu}=\frac{2(2-\nu)\pi^{\nu/2}}{\nu}\,\frac{\Gamma^\nu\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^\nu(1/\nu)}. \tag{11}$$

Наконец, при $n\to 0$ имеем $\xi_0\to 2/\sqrt{n}$ и решение, определяемое формулами (5—7), дает

$$W=\lim_{n\to 0}\left\{\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\left(1-n\frac{x^2}{4at}\right)^{1/n}\right\}=\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\,e^{-x^2/4at}$$

в согласии с формулой (51,7).

## § 52. Теплопроводность в ограниченной среде

В задачах о теплопроводности в ограниченной среде задание начального распределения температуры недостаточно для однозначности решения, и необходимо еще задание краевых условий на ограничивающей среду поверхности.