где безразмерная функция $f(\xi)$ умножена на величину, имеющую размерность эрг/см^3. После этой подстановки уравнение (4) дает

$$(2+n)\frac{d}{d\xi}\left(f^n \frac{df}{d\xi}\right)+\xi\frac{df}{d\xi}+f=0.$$

Это уравнение в полных производных имеет простое решение, удовлетворяющее условиям задачи:

$$f(\xi)=\left[\frac{n}{2(2+n)}\left(\xi_0^2-\xi^2\right)\right]^{1/n}, \tag{7}$$

где ξ_0 — постоянная интегрирования.

При $n>0$ эта формула дает распределение температуры в области между границами $x=\pm x_0$, определяющимися равенством $\xi=\pm\xi_0$; вне этих границ $W=0$. Отсюда следует, что границы нагретой области расширяются со временем по закону

$$x_0=\text{const}\, t^{1/(2+n)}.$$

Постоянная ξ_0 определяется условием постоянства полного количества тепла:

$$Q=\int_{-x_0}^{x_0} W\,dx=Q\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

откуда получается

$$\xi_0^{2+n}=\frac{(2+n)^{1+n}\,2^{1-n}}{n\pi^{n/2}}\,\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma^n(1/n)}. \tag{9}$$

При $n=-\nu<0$ напишем решение в виде

$$f(\xi)=\left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}\left(\xi_0^2+\xi^2\right)\right]^{-1/\nu}. \tag{10}$$

Здесь тепло распределено по всему пространству, причем на больших расстояниях W убывает по степенному закону: $W\sim x^{-2/\nu}$. Это решение применимо лишь при $\nu<2$; при $\nu\geqslant 2$ нормировочный интеграл (8) (который берется теперь в пределах $\pm\infty$) расходится, что физически означает мгновенный уход тепла на бесконечное расстояние. При $\nu<2$ постоянная ξ_0 в (10) равна

$$\xi_0^{2-\nu}=\frac{2(2-\nu)\pi^{\nu/2}}{\nu}\,\frac{\Gamma^\nu\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^\nu(1/\nu)}. \tag{11}$$

Наконец, при $n\to 0$ имеем $\xi_0\to 2/\sqrt{n}$ и решение, определяемое формулами (5—7), дает

$$W=\lim_{n\to 0}\left\{\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\left(1-n\frac{x^2}{4at}\right)^{1/n}\right\}=\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\,e^{-x^2/4at}$$

в согласии с формулой (51,7).

§ 52. Теплопроводность в ограниченной среде

В задачах о теплопроводности в ограниченной среде задание начального распределения температуры недостаточно для однозначности решения, и необходимо еще задание краевых условий на ограничивающей среду поверхности.

Рассмотрим теплопроводность в полупространстве ($x > 0$) и начнем со случая, когда на граничной поверхности $x = 0$ поддерживается заданная постоянная температура. Эту температуру мы примем условно за нуль, т. е. будем отсчитывать от нее температуру в других точках среды.

В начальный момент времени по-прежнему задано распределение температуры во всей среде. Таким образом, граничные и начальные условия гласят:

$$T = 0 \text{ при } x = 0; \; T = T_0(x, y, z) \text{ при } t = 0, \; x > 0. \qquad (52,1)$$

Решение уравнения теплопроводности с этими условиями можно свести к решению того же уравнения для среды, не ограниченной в обоих направлениях оси x, при помощи следующего искусственного приема. Представим себе, что среда распространяется и по левую сторону от плоскости $x = 0$, причем в начальный момент времени распределение температуры в этой части среды описывается той же функцией T_0, но только взятой с обратным знаком. Другими словами, в начальный момент времени распределение температуры во всем пространстве описывается некоторой функцией, нечетной по переменной x, т. е. такой, что

$$T_0(-x, y, z) = -T_0(x, y, z). \qquad (52,2)$$

Из равенства (52,2) следует, что $T_0(0, y, z) = -T_0(0, y, z) = 0$, т. е. требуемое граничное условие (52,1) автоматически выполнено в начальный момент времени, и из симметрии условий задачи очевидно, что оно будет выполнено и во всякий другой момент времени.

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (50,4) в неограниченной среде с начальной функцией $T_0(x, y, z)$, удовлетворяющей (52,2), и без какого бы то ни было граничного условия. Поэтому мы можем воспользоваться общей формулой (51,2).

Разобьем в (51,2) область интегрирования по dx' на две части: от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞, и воспользуемся соотношением (52,2). Мы получим тогда:

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \int\limits_{0}^{\infty} T_0(\mathbf{r}') \exp\left\{-\frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{4\chi t}\right\} \times$$
$$\times \left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}\right\}\right] dx'\, dy'\, dz'. \qquad (52,3)$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя температуру во всей среде.

Если начальное распределение температуры зависит только от x, то формула (52,3) принимает вид

$$T(x, t) = \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}} \int_0^\infty T_0(x') \left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}\right\}\right] dx'. \qquad (52,4)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда в начальный момент везде, кроме $x = 0$, температура равна заданной постоянной величине, которую, не ограничивая общности, можно положить равной -1; температура же на плоскости $x = 0$ все время равна нулю. Соответствующее решение получается непосредственно подстановкой $T_0(x) = -1$ в (52,4). Разобьем интеграл в (52,4) на два интеграла и в каждом из них произведем замену переменных типа

$$\frac{x' - x}{2\sqrt{\chi t}} = \xi.$$

Тогда мы получим для $T(x, t)$ следующее выражение:

$$T(x, t) = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{erf}\left(-\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)\right\},$$

где функция $\operatorname{erf} x$ определяется как

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi \qquad (52,5)$$

и называется *интегралом ошибок* (заметим, что $\operatorname{erf}(\infty) = 1$). Поскольку

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x),$$

то мы получаем окончательно:

$$T(x, t) = -\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right). \qquad (52,6)$$

На рис. 40 изображен график функции $\operatorname{erf} \xi$. С течением времени распределение температуры по пространству все более сглаживается. Это сглаживание происходит таким образом, что каждое заданное значение температуры перемещается вправо пропорционально $\sqrt{t}$. Последний результат, впрочем, заранее очевиден. Действительно, рассматриваемая задача определяется всего одним параметром — начальной разностью температур T_0 граничной плоскости и остального пространства (положенной выше условно равной единице). Из имеющихся в нашем распоряжении параметров T_0 и χ и переменных x и t можно составить всего одну безразмерную комбинацию $x/\sqrt{\chi t}$; поэтому ясно, что искомое распределение температуры должно определяться функцией вида $T = T_0 f\left(x/\sqrt{\chi t}\right)$.

Рассмотрим теперь случай, когда граничная поверхность среды теплоизолирована. Другими словами, на плоскости $x = 0$

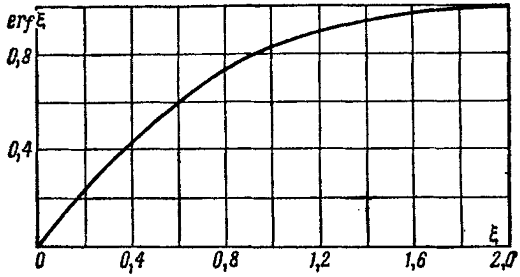

Рис. 40

тепловой поток должен отсутствовать, т. е. должно быть $\partial T/\partial x = 0$. Таким образом, имеем теперь следующие граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0; \quad T = T_0(x, y, z) \text{ при } t = 0, \; x > 0. \qquad (52,7)$$

Для нахождения решения поступим аналогично тому, как мы делали в предыдущем случае. Именно, опять представим себе среду неограниченной в обе стороны от плоскости $x = 0$. Распределение же температуры в начальный момент времени представим себе теперь симметричным относительно плоскости $x = 0$. Другими словами, функцию $T_0(x, y, z)$ предположим теперь четной по переменной x:

$$T_0(-x, y, z) = T_0(x, y, z). \qquad (52,8)$$

Тогда

$$\frac{\partial T_0(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{\partial T_0(-x, y, z)}{\partial x}$$

и при $x = 0$ будет $\partial T_0/\partial x = 0$. Из симметрии очевидно, что это условие автоматически будет выполнено и во все последующие моменты времени. Повторив произведенные выше вычисления, но используя при этом (52,8) вместо (52,2), найдем, что общее решение поставленной задачи дается формулами, отличающимися от (52,3) или (52,4) лишь тем, что вместо разности двух членов в квадратных скобках стоит их сумма.

Перейдем к задачам с другого рода граничными условиями, тоже допускающими решение уравнения теплопроводности в общем виде. Рассмотрим среду, ограниченную плоскостью $x = 0$, через которую извне подводится поток тепла, являющийся заданной функцией времени. Другими словами, имеем граничные и начальные условия:

$$-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}=q(t) \text{ при } x=0;\ T=0 \text{ при } t=-\infty,\ x>0, \quad (52,9)$$

где $q(t)$ — заданная функция.

Предварительно решим вспомогательную задачу, в которой $q(t)=\delta(t)$. Легко сообразить, что эта задача физически эквивалентна задаче о распространении тепла в неограниченной среде от точечного источника, содержащего заданное полное количество тепла. Действительно, граничное условие $-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}=\delta(t)$ при $x=0$ физически означает, что через каждую единицу площади плоскости $x=0$ мгновенно подводится количество тепла, равное единице. В задаче же с условием $T=\frac{2}{\rho c_p}\delta(x)$ при $t=0$ на той же площади в начальный момент времени сконцентрировано количество тепла $\int\rho c_p T\,dx=2$, из которого половина распространяется затем в направлении положительных x (а другая половина — к отрицательным x). Поэтому ясно, что решения обеих задач тождественны и согласно (51,7) находим:

$$\varkappa T(x,t)=\sqrt{\frac{\chi}{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\chi t}}.$$

Поскольку в силу линейности уравнений эффекты от тепла, подводимого в различные моменты времени, просто складываются, то искомое общее решение уравнения теплопроводности с условиями (52,9) есть

$$\varkappa T(x,t)=\int_{-\infty}^{t}\sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}}\,q(\tau)\exp\left\{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right\}d\tau. \quad (52,10)$$

В частности, на самой плоскости $x=0$ температура меняется по закону

$$\varkappa T(0,t)=\int_{-\infty}^{t}\sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}}\,q(\tau)\,d\tau. \quad (52,11)$$

С помощью этих результатов можно непосредственно получить решение другой задачи, в которой заданной функцией времени является сама температура T на плоскости $x=0$:

$$T=T_0(t) \text{ при } x=0;\ T=0 \text{ при } t=-\infty,\ x>0. \quad (52,12)$$

Для этого замечаем, что если некоторая функция $T(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то этому же уравнению удовлетворяет и производная $\partial T/\partial x$. С другой стороны, дифференцируя по x выражение (52,10), получим:

$$-\varkappa\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}=\int_{-\infty}^{t}\frac{xq(\tau)}{2(\pi\chi)^{1/2}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right\}d\tau.$$

Это есть функция, удовлетворяющая уравнению теплопроводности, причем $q(t)$ есть (согласно (52,9)) ее же значение при $x=0$; очевидно, что она и дает искомое решение задачи с условиями (52,12). Написав $T(x,t)$ вместо $-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}$ и $T_0(t)$ вместо $q(t)$, получаем таким образом:

$$T(x,t)=\frac{x}{2(\pi\chi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{t}\frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right\}d\tau. \qquad (52,13)$$

Для потока тепла $q=-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}$ через граничную поверхность $x=0$ получаем после короткого преобразования:

$$q(t)=\frac{\varkappa}{\sqrt{\pi\chi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{dT_0(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \qquad (52,14)$$

Эта формула представляет собой обращение интегрального соотношения (52,11).

Очень просто решается важная задача, в которой на граничной поверхности $x=0$ температура задается в течение всего времени в виде периодической функции:

$$T=T_0e^{-i\omega t} \quad \text{при} \quad x=0.$$

Ясно, что распределение температуры во всем пространстве будет зависеть от времени посредством того же множителя $e^{-i\omega t}$. Поскольку одномерное уравнение теплопроводности формально совпадает с уравнением (24,3), определяющим движение вязкой жидкости над колеблющейся плоскостью, то по аналогии с формулой (24,5) мы можем сразу написать искомое распределение температуры в виде

$$T=T_0\exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right)\exp\left(ix\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}-i\omega t\right). \qquad (52,15)$$

Мы видим, что колебания температуры на граничной поверхности распространяются от нее в виде быстро затухающих в глубь среды тепловых волн.

Другой тип задач теории теплопроводности представляют задачи о скорости выравнивания температуры неравномерно нагретых конечных тел, поверхность которых поддерживается при заданных условиях. Следуя общим методам, ищем решения уравнения теплопроводности вида

$$T = T_n(\mathbf{r})\, e^{-\lambda_n t}$$

с постоянными λ_n. Для функций T_n получаем уравнение

$$\chi \Delta T_n = -\lambda_n T_n. \tag{52,16}$$

Это уравнение при заданных граничных условиях имеет отличные от нуля решения лишь при определенных λ_n, составляющих набор его собственных значений. Все эти значения вещественны и положительны, а соответствующие функции $T_n(x, y, z)$ составляют полную систему взаимно ортогональных функций. Пусть распределение температуры в начальный момент времени дается функцией $T_0(x, y, z)$. Разлагая ее по системе функций T_n:

$$T_0(\mathbf{r}) = \sum_n c_n T_n(\mathbf{r}),$$

получим искомое решение поставленной задачи в виде

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n T_n(\mathbf{r})\, e^{-\lambda_n t}. \tag{52,17}$$

Скорость выравнивания температуры определяется, очевидно, в основном тем членом этой суммы, который соответствует наименьшему из λ_n; пусть это будет λ_1. Время выравнивания температуры можно определить как $\tau = 1/\lambda_1$.

Задачи

1. Определить распределение температуры вокруг сферической поверхности (радиуса R), температура которой есть заданная функция времени $T_0(t)$.

Решение. Уравнение теплопроводности для центрально-симметрического распределения температуры в сферических координатах есть

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{r}\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}.$$

Подстановкой $T(r, t) = F(r, t)/r$ оно приводится к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

типа одномерного уравнения теплопроводности. Поэтому искомое решение можно написать прямо на основании (52,13) в виде

$$T(r, t) = \frac{R(r-R)}{2r(\pi\chi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right\} d\tau.$$

2. То же, если температура сферической поверхности есть $T_0 e^{-i\omega t}$.

Решение. Аналогично (52,15), получим:

$$T = T_0 e^{-i\omega t} \frac{R}{r} \exp\left\{-(1-i)(r-R)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right\}.$$

3. Определить время выравнивания температуры для куба (с длиной ребра a), поверхность которого: а) поддерживается при заданной температуре $T = 0$, б) теплоизолирована.

Решение. В случае а) наименьшему значению λ соответствует следующее решение уравнения (52,16):

$$T_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi z}{a}$$

(начало координат — в одной из вершин куба), причем

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{a^2}{3\pi^2\chi}.$$

В случае же б) имеем $T_1 = \cos\frac{\pi x}{a}$ (или такая же функция от y или z), причем $\tau = a^2/\pi^2\chi$.

4. То же для шара радиуса R.

Решение. Наименьшему значению λ соответствует центрально-симметричное решение уравнения (52,16)

$$T_1 = \frac{\sin kr}{r},$$

причем в случае а) $k = \pi/R$, так что

$$\tau = \frac{1}{\chi k^2} = \frac{R^2}{\chi\pi^2}.$$

В случае же б) k определяется как наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} kR = kR$, откуда $kR = 4{,}493$, так что $\tau = 0{,}050\, R^2/\chi$.

§ 53. Закон подобия для теплопередачи

Процессы теплопередачи в жидкости осложняются по сравнению с теплопередачей в твердых телах возможностью движения жидкости. Погруженное в движущуюся жидкость нагретое тело охлаждается значительно быстрее, чем в неподвижной жидкости, где теплопередача происходит только с помощью процессов теплопроводности. О движении неравномерно нагретой жидкости говорят как о *конвекции*.

Будем предполагать, что имеющиеся в жидкости разности температур достаточно малы для того, чтобы ее физические свойства можно было считать не зависящими от температуры. С другой стороны, эти разности будут предполагаться настолько большими, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь изменениями температуры, обусловленными выделением тепла, связанным с диссипацией энергии путем внутреннего трения (см. § 55). Тогда в уравнении (50,2) может быть опущен член, содержащий вязкость, так что остается

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \tag{53,1}$$

где $\chi = \varkappa/\rho c_p$ — температуропроводность. Это уравнение вместе с уравнением Навье-Стокса и уравнением непрерывности пол-