3. Определить время выравнивания температуры для куба (с длиной ребра a), поверхность которого: а) поддерживается при заданной температуре $T = 0$, б) теплоизолирована.

Решение. В случае а) наименьшему значению λ соответствует следующее решение уравнения (52,16):

$$T_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi z}{a}$$

(начало координат — в одной из вершин куба), причем

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{a^2}{3\pi^2\chi}.$$

В случае же б) имеем $T_1 = \cos\frac{\pi x}{a}$ (или такая же функция от y или z), причем $\tau = a^2/\pi^2\chi$.

4. То же для шара радиуса R.

Решение. Наименьшему значению λ соответствует центрально-симметричное решение уравнения (52,16)

$$T_1 = \frac{\sin kr}{r},$$

причем в случае а) $k = \pi/R$, так что

$$\tau = \frac{1}{\chi k^2} = \frac{R^2}{\chi\pi^2}.$$

В случае же б) k определяется как наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} kR = kR$, откуда $kR = 4{,}493$, так что $\tau = 0{,}050\, R^2/\chi$.

§ 53. Закон подобия для теплопередачи

Процессы теплопередачи в жидкости осложняются по сравнению с теплопередачей в твердых телах возможностью движения жидкости. Погруженное в движущуюся жидкость нагретое тело охлаждается значительно быстрее, чем в неподвижной жидкости, где теплопередача происходит только с помощью процессов теплопроводности. О движении неравномерно нагретой жидкости говорят как о *конвекции*.

Будем предполагать, что имеющиеся в жидкости разности температур достаточно малы для того, чтобы ее физические свойства можно было считать не зависящими от температуры. С другой стороны, эти разности будут предполагаться настолько большими, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь изменениями температуры, обусловленными выделением тепла, связанным с диссипацией энергии путем внутреннего трения (см. § 55). Тогда в уравнении (50,2) может быть опущен член, содержащий вязкость, так что остается

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \tag{53,1}$$

где $\chi = \varkappa/\rho c_p$ — температуропроводность. Это уравнение вместе с уравнением Навье-Стокса и уравнением непрерывности полностью описывает конвекцию в рассматриваемых условиях. Ниже мы будем рассматривать стационарное конвективное движение[1]. Тогда все производные по времени выпадают, и мы получаем следующую систему основных уравнений:

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \tag{53,2}$$

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{53,3}$$

В эту систему, в которой неизвестными функциями являются $\mathbf{v}$, T и p/ρ, входят всего два постоянных параметра: ν и χ. Кроме того, решение этих уравнений зависит, через посредство граничных условий, еще от некоторого характерного параметра длины l, скорости U и характерной разности температур $T_1 - T_0$. Первые два определяют, как всегда, размеры фигурирующих в задаче твердых тел и скорость основного потока жидкости, а третий — разность температур между жидкостью и твердыми телами.

При составлении безразмерных величин из имеющихся в нашем распоряжении параметров возникает вопрос о том, какую размерность следует приписать температуре. Для этого замечаем, что температура определяется уравнением (53,2), являющимся линейным и однородным по T. Поэтому температура может быть умножена без нарушения уравнений на произвольный постоянный множитель. Другими словами, единицы для измерения температуры могут быть выбраны произвольным образом. Возможность такого преобразования температуры может быть учтена формально посредством приписывания ей некоторой особой размерности, которая бы не входила в размерности остальных величин. Таковой является как раз размерность градуса — единицы, в которой температура обычно и измеряется.

Таким образом, конвекция характеризуется в рассматриваемых условиях пятью параметрами со следующими размерностями:

$$[\nu] = [\chi] = \text{см}^2/\text{с}, \quad [U] = \text{см/с}, \quad [l] = \text{см}, \quad [T_1 - T_0] = \textit{град}.$$

Из них можно составить две независимые безразмерные комбинации. В качестве таковых мы выберем число Рейнольдса $\mathsf{R} = Ul/\nu$ и *число Прандтля*, определяемое как отношение

$$\mathsf{P} = \nu/\chi. \tag{53,4}$$

Всякая другая безразмерная величина может быть выражена через R и P[2].

---

[1]) Для того чтобы конвекция могла быть стационарной, необходимо, строго говоря, чтобы в соприкасающихся с жидкостью твердых телах находились источники тепла, поддерживающие их при постоянной температуре.

[2]) Иногда пользуются *числом Пекле* (*Peclet*), определяемым как Ul/χ. Оно сводится к произведению RP.

Что касается числа Прандтля, то оно представляет собой просто некоторую материальную константу вещества и не зависит от свойств самого потока. У газов это число — всегда порядка единицы. Значения же P для различных жидкостей лежат в более широком интервале. У очень вязких жидкостей P может достигать очень больших значений. Приведем в качестве примера значения P при 20 °C для ряда веществ:

воздух	0,733
вода	6,75
спирт	16,6
глицерин	7250
ртуть	0,044

Подобно тому как было сделано в § 19, мы можем теперь заключить, что в стационарном конвекционном потоке (заданного типа) распределение температуры и скорости имеет вид

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0}=f\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\ \mathrm{R},\ \mathrm{P}\right),\qquad \frac{\mathbf{v}}{U}=\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\ \mathrm{R}\right). \tag{53,5}$$

Безразмерная функция, определяющая распределение температуры, зависит как от параметров от обоих чисел R и P; распределение же скоростей — только от числа R, поскольку оно определяется уравнениями (53,3), в которые теплопроводность не входит вовсе. Два конвекционных потока подобны, если их числа Рейнольдса и Прандтля одинаковы.

Теплопередачу между твердыми телами и жидкостью характеризуют обычно так называемым *коэффициентом теплопередачи* α, определяемым как отношение

$$\alpha=\frac{q}{T_1-T_0}, \tag{53,6}$$

где q — плотность потока тепла через поверхность тела, а $T_1 - T_0$ — характерная разность температур твердого тела и жидкости. Если распределение температуры в жидкости известно, то коэффициент теплопередачи легко определить, вычисляя плотность потока тепла $q=-\varkappa\partial T/\partial n$ на границе жидкости (производная берется по нормали к поверхности тела).

Коэффициент теплопередачи является размерной величиной. В качестве безразмерной величины, характеризующей теплопередачу, пользуются *числом Нуссельта*

$$\mathrm{N}=\alpha l/\varkappa. \tag{53,7}$$

Из соображений подобия следует, что для каждого данного типа конвекционного движения число Нуссельта является определенной функцией только от чисел Рейнольдса и Прандтля:

$$\mathrm{N}=f(\mathrm{R},\mathrm{P}). \tag{53,8}$$

Эта функция приобретает тривиальный вид при конвекции с достаточно малыми числами Рейнольдса. Малым R соответствуют малые скорости движения. Поэтому в первом приближении в уравнении (53,2) можно пренебречь членом, содержащим скорость, так что распределение температуры определяется уравнением $\Delta T = 0$, т. е. обычным уравнением стационарной теплопроводности в неподвижной среде. Коэффициент теплопередачи не может, очевидно, зависеть теперь ни от скорости, ни от вязкости жидкости и потому должно быть просто

$$\mathrm{N} = \mathrm{const}, \tag{53,9}$$

причем при вычислении этой постоянной можно рассматривать жидкость как неподвижную.

Задача

Определить распределение температуры в жидкости, совершающей пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, температура стенки которой меняется вдоль длины трубы по линейному закону.

Решение. Условия течения одинаковы во всех сечениях трубы, и распределение температуры можно искать в виде $T = Az + f(r)$, где Az — температура стенки (выбраны цилиндрические координаты с осью z по оси трубы). Для скорости имеем согласно (17,9)

$$v_z = v = 2\bar{v}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость. Подставляя это в (53,2), находим уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = \frac{2\bar{v}A}{\chi}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

Решение этого уравнения, не имеющее особенностей при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $f = 0$ при $r = R$, есть

$$f(r) = -\frac{\bar{v}AR^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

Плотность потока тепла

$$q = \varkappa\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{1}{2}\rho c_p \bar{v} R A.$$

Она не зависит от теплопроводности.

§ 54. Теплопередача в пограничном слое

Распределение температуры в жидкости при очень больших числах Рейнольдса обнаруживает особенности, аналогичные тем, которыми обладает и само распределение скоростей. Очень большие значения R эквивалентны очень малой вязкости. Но поскольку число $\mathrm{P} = \nu/\chi$ не бывает очень малым, то вместе с ν должен рассматриваться как малый и коэффициент температуропроводности χ. Это соответствует тому, что при достаточно больших скоростях движения жидкость может приближенно рассматриваться как идеальная, — в идеальной жидкости