ствуют малые скорости движения. Поэтому в первом приближении в уравнении (53,2) можно пренебречь членом, содержащим скорость, так что распределение температуры определяется уравнением $\Delta T = 0$, т. е. обычным уравнением стационарной теплопроводности в неподвижной среде. Коэффициент теплопередачи не может, очевидно, зависеть теперь ни от скорости, ни от вязкости жидкости и потому должно быть просто

$$\mathrm{N} = \mathrm{const}, \tag{53,9}$$

причем при вычислении этой постоянной можно рассматривать жидкость как неподвижную.

Задача

Определить распределение температуры в жидкости, совершающей пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, температура стенки которой меняется вдоль длины трубы по линейному закону.

Решение. Условия течения одинаковы во всех сечениях трубы, и распределение температуры можно искать в виде $T = Az + f(r)$, где Az — температура стенки (выбраны цилиндрические координаты с осью z по оси трубы). Для скорости имеем согласно (17,9)

$$v_z = v = 2\bar{v}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость. Подставляя это в (53,2), находим уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = \frac{2\bar{v}A}{\chi}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

Решение этого уравнения, не имеющее особенностей при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $f = 0$ при $r = R$, есть

$$f(r) = -\frac{\bar{v}AR^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

Плотность потока тепла

$$q = \varkappa \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{1}{2}\rho c_p \bar{v} R A.$$

Она не зависит от теплопроводности.

§ 54. Теплопередача в пограничном слое

Распределение температуры в жидкости при очень больших числах Рейнольдса обнаруживает особенности, аналогичные тем, которыми обладает и само распределение скоростей. Очень большие значения R эквивалентны очень малой вязкости. Но поскольку число $\mathrm{P} = \nu/\chi$ не бывает очень малым, то вместе с ν должен рассматриваться как малый и коэффициент температуропроводности χ. Это соответствует тому, что при достаточно больших скоростях движения жидкость может приближенно рассматриваться как идеальная, — в идеальной жидкости должны отсутствовать как процессы внутреннего трения, так и процессы теплопроводности.

Такое рассмотрение, однако, опять будет неприменимо в пристеночном слое жидкости, поскольку при нем не будут выполняться на поверхности тела ни граничное условие прилипания, ни условие одинаковости температур жидкости и тела. В результате в пограничном слое происходит наряду с быстрым падением скорости также и быстрое изменение температуры жидкости до значения, равного температуре поверхности твердого тела. Пограничный слой характеризуется наличием в нем больших градиентов как скорости, так и температуры.

Что касается распределения температуры в основном объеме жидкости, то легко видеть, что при обтекании нагретого тела (при больших R) нагревание жидкости будет происходить практически только в области следа, между тем как вне следа температура жидкости не изменится. Действительно, при очень больших R процессы теплопроводности в основном потоке не играют практически никакой роли. Поэтому температура изменится только в тех местах пространства, в которые попадает при своем движении нагретая в пограничном слое жидкость. Но мы знаем (см. § 35), что из пограничного слоя линии тока выходят в область основного потока только за линией отрыва, где они попадают в область турбулентного следа. Из области же следа линии тока в окружающее пространство уже не выходят. Таким образом, текущая мимо поверхности нагретого тела в пограничном слое жидкость попадает целиком в область следа, в котором и остается. Мы видим, что тепло оказывается распределенным в тех же областях, в которых имеется отличная от нуля завихренность.

Внутри самой турбулентной области происходит интенсивный теплообмен, обусловленный сильным перемешиванием жидкости, которое характерно для всякого турбулентного движения. Такой механизм теплопередачи можно назвать турбулентной температуропроводностью и характеризовать соответствующим коэффициентом $\chi_{\text{турб}}$, подобно тому как мы ввели понятие о коэффициенте турбулентной вязкости $\eta_{\text{турб}}$ (§ 33). По порядку величины коэффициент *турбулентной температуропроводности* определяется такой же формулой, как и $\nu_{\text{турб}}$ (33,2):

$$\chi_{\text{турб}} \sim l\Delta u.$$

Таким образом, процессы теплопередачи в ламинарном и турбулентном потоках являются принципиально различными. В предельном случае сколь угодно малых вязкости и теплопроводности в ламинарном потоке процессы теплопередачи вообще отсутствуют и температура жидкости в каждом месте пространства не меняется. Напротив, в турбулентно движущейся жидкости в том же предельном случае теплопередача происходит и приводит к быстрому выравниванию температуры в различных участках потока.

Рассмотрим сначала теплопередачу в ламинарном пограничном слое. Уравнения движения (39,13) сохраняют свой вид. Аналогичное упрощение должно быть произведено теперь и для уравнения (53,2). Написанное в раскрытом виде это уравнение имеет вид (все величины не зависят от координаты z):

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

В правой его части можно пренебречь производной $\partial^2 T/\partial x^2$ по сравнению с $\partial^2 T/\partial y^2$, так что остается

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{54,1}$$

Из сравнения этого уравнения с первым из уравнений (39,13) ясно, что если число Прандтля — порядка единицы, то порядок величины δ толщины слоя, в котором происходит падение скорости v_x и изменение температуры T, будет по-прежнему определяться полученными в § 39 формулами, т. е. будет обратно пропорционален $\sqrt{\mathrm{R}}$. Поток тепла

$$q = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial n} \sim \varkappa \frac{T_1 - T_0}{\delta}.$$

Поэтому мы приходим к результату, что q, а вместе с ним и число Нуссельта, прямо пропорционально $\sqrt{\mathrm{R}}$. Зависимость же N от P остается неопределенной. Таким образом, получаем:

$$\mathrm{N} = \sqrt{\mathrm{R}}\, f(\mathrm{P}). \tag{54,2}$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент теплопередачи α обратно пропорционален корню из размеров l тела.

Перейдем теперь к теплопередаче в турбулентном пограничном слое. При этом удобно, как и в § 42, рассмотреть бесконечный плоскопараллельный турбулентный поток, текущий вдоль бесконечной плоской поверхности. Поперечный градиент температуры dT/dy в таком потоке может быть определен из таких же соображений размерности, какие были использованы для нахождения градиента скорости du/dy. Обозначим посредством q плотность потока тепла вдоль оси y, вызванного наличием градиента температуры. Этот поток является такой же постоянной (не зависящей от y) величиной, какой является поток импульса σ, и наряду с ним может рассматриваться как заданный параметр, определяющий свойства потока. Кроме того, мы имеем теперь в качестве параметров плотность ρ и теплоемкость c_p единицы массы жидкости. Вместо σ введем в качестве параметра величину v_*; q и c_p обладают размерностями соответственно эрг/с·см^2 = г/с^3 и эрг/г·град = см^2/с^2·град. Что касается коэффициентов вязкости и теплопроводности, то они при достаточно больших R не могут входить в dT/dy явно.

В силу упоминавшейся уже в § 53 однородности уравнений по температуре можно изменить температуру в любое число раз без того, чтобы нарушить уравнения. Но при изменении температуры должен во столько же раз измениться и поток тепла. Поэтому q и T должны быть пропорциональны друг другу. Но из q, v_*, ρ, c_p и y можно составить всего только одну величину, которая имеет размерность град/см и в то же время пропорциональна q. Такой величиной является $q/\rho c_p v_* y$. Поэтому должно быть

$$\frac{dT}{dy} = \beta \frac{q}{\rho c_p \varkappa v_* y},$$

где β есть числовая постоянная, которая должна быть определена экспериментально[1]). Отсюда имеем:

$$T = \beta \frac{q}{\varkappa \rho c_p v_*} (\ln y + c). \tag{54,3}$$

Таким образом, температура, как и скорость, распределена по логарифмическому закону. Входящая сюда постоянная интегрирования c, как и при выводе (42,7), должна быть определена из условий в вязком подслое. Полная разность между температурой жидкости в данной точке и температурой стенки (которую мы принимаем условно за нуль) складывается из падения температуры в турбулентном слое и ее падения в вязком подслое. Логарифмическим законом (54,3) определяется только первое из них. Поэтому, если написать (54,3) в виде

$$T = \beta \frac{q}{\varkappa \rho c_p v_*} \left(\ln \frac{y v_*}{\nu} + \mathrm{const} \right),$$

введя под знаком логарифма множителем толщину y_0, то const (умноженная на множитель, стоящий перед скобкой) должна представлять собой изменение температуры в вязком подслое. Это изменение зависит, конечно, и от коэффициентов ν и χ. Поскольку const есть величина безразмерная, то она должна иметь вид некоторой функции от числа P, являющегося единственной безразмерной комбинацией, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин ν, χ, ρ, v_*, c_p

[1]) Здесь $\varkappa$ — постоянная Кармана, входящая в логарифмический профиль скоростей (42,4). При таком определении β есть отношение $\beta = \nu_{\text{турб}}/\chi_{\text{турб}}$, где $\nu_{\text{турб}}$ и $\chi_{\text{турб}}$ — коэффициенты в соотношениях

$$q = \rho c_p \chi_{\text{турб}} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \sigma = \rho \nu_{\text{турб}} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

(что касается потока тепла q, то он не может входить в const, поскольку T должно быть пропорционально q, а q входит уже в множитель перед скобкой). Таким образом, получаем закон распределения температуры в виде

$$T = \beta \frac{q}{\varkappa \rho c_p v_*}\left[\ln \frac{v_* y}{\nu} + f(\mathrm{P})\right] \tag{54,4}$$

(*Л. Д. Ландау*, 1944). Эмпирическое значение постоянной β в этом выражении: $\beta \approx 0{,}9$. Значение функции f для воздуха: $f(0{,}7) \approx 1{,}5$.

С помощью формулы (54,4) можно рассчитать теплопередачу при турбулентном течении по трубе, при обтекании плоской пластинки и т. п. Мы не станем останавливаться здесь на этом.

Турбулентные пульсации температуры

Говоря выше о температуре турбулентной жидкости, мы подразумевали, конечно, ее усредненное по времени значение. Истинная же температура испытывает в каждой точке пространства крайне нерегулярное изменение со временем, подобное пульсациям скорости.

Будем считать, что существенное изменение средней температуры происходит на тех же расстояниях l (основной масштаб турбулентности), на которых меняется средняя скорость движения. К мелкомасштабным (масштабы $\lambda \ll l$) пульсациям температуры можно применить те же общие представления и соображения подобия, которые были уже использованы при рассмотрении локальных свойств турбулентности в § 33. При этом будем считать, что число $\mathrm{P} \sim 1$ (в противном случае может оказаться необходимым введение двух внутренних масштабов, определенных по ν и по χ). Тогда инерционный интервал масштабов является в то же время *конвективным*, — выравнивание температур в нем происходит путем механического перемешивания различно нагретых «жидких частиц» без участия истинной теплопроводности; свойства температурных пульсаций в этом интервале не зависят и от крупномасштабного движения. Определим зависимость разностей температур T_λ от расстояний λ в инерционном интервале (*А. М. Обухов*, 1949).

Теплопроводностная диссипация энергии (в единице объема) дается выражением $\varkappa(\nabla T)^2/T$ (ср. (49,6) или ниже (79,1)). Разделив его на ρc_p, получим величину, $\chi(\nabla T)^2/T \equiv \varphi/T$, определяющую скорость диссипативного понижения температуры; предполагая турбулентные колебания температуры относительно малыми, можно заменить T в знаменателе постоянной средней температурой. Введенная таким образом величина φ представляет собой еще один (наряду с ε) параметр, определяющий локальные свойства турбулентности в неравномерно нагретой жидкости.

Следуя изложенному в § 33 способу (см. текст после (33,1)), выражаем φ через величины, характеризующие пульсации масштаба λ:

$$\varphi \sim \chi_{\text{турб}\,\lambda} (T_\lambda/\lambda)^2.$$

Подставив сюда

$$\chi_{\text{турб}\,\lambda} \sim \nu_{\text{турб}\,\lambda} \sim \lambda v_\lambda, \qquad v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$$

(согласно (33,2) и (33,6)), получим искомый результат:

$$T_\lambda^2 \sim \varphi\varepsilon^{-1/3}\lambda^{2/3}. \tag{54,5}$$

Таким образом, для $\lambda \gg \lambda_0$ пульсации температуры, как и пульсации скорости, пропорциональны $\lambda^{1/3}$.

На расстояниях же $\lambda \lesssim \lambda_0$ температура сглаживается путем истинной теплопроводности. На масштабах $\lambda \ll \lambda_0$ температура меняется плавно. По тем же соображениям, что и для скорости (ср. (33,19)), разности T_λ здесь пропорциональны λ.

Задачи

1. Определить предельный закон зависимости числа Нуссельта от числа Прандтля в ламинарном пограничном слое при больших значениях P и больших R.

Решение. При больших P расстояние δ', на котором происходит изменение температуры, мало по сравнению с толщиной δ слоя, в котором происходит падение скорости v_x (δ' может быть названо толщиной температурного пограничного слоя). Порядок величины δ' может быть получен оценкой членов уравнения (54,1). На расстоянии от $y = 0$ до $y \sim \delta'$ температура испытывает изменение порядка полной разности $T_1 - T_0$ температур жидкости и твердого тела, а скорость v_x на том же расстоянии испытывает изменение порядка $U\delta'/\delta$ (полное изменение порядка U скорость испытывает на расстоянии δ). Поэтому при $y \sim \delta'$ члены уравнения (54,1) порядка величины

$$\chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \chi\frac{T_1 - T_0}{\delta'^2}, \qquad v_x\frac{\partial T}{\partial x} \sim U\frac{\delta'}{\delta}\,\frac{T_1 - T_0}{l}.$$

Сравнение обоих выражений дает $\delta'^3 \sim \chi\delta l/U$. Подставляя $\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{R}}$, получаем:

$$\delta' \sim \frac{l}{\mathrm{R}^{1/2}\mathrm{P}^{1/3}} \sim \frac{\delta}{\mathrm{P}^{1/3}}.$$

Таким образом, при больших P толщина температурного пограничного слоя убывает по сравнению с толщиной скоростного пограничного слоя обратно пропорционально кубическому корню из P. Поток тепла

$$q = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial y} \sim \varkappa\frac{T_1 - T_0}{\delta'},$$

и окончательно находим предельный закон теплопередачи[1]):

$$\mathrm{N} = \mathrm{const}\ \mathrm{R}^{1/2}\mathrm{P}^{1/3}.$$

2. Определить предельный вид функции $f(\mathrm{P})$ в логарифмическом законе распределения температуры (54,4) при больших значениях P.

Решение Согласно сказанному в § 42 поперечная скорость в вязком подслое порядка величины $v_*(y/y_0)^2$, а масштаб турбулентного движения — порядка y^2/y_0. Турбулентная температуропроводность, следовательно,

$$\chi_{\text{турб}} \sim v_* y_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^4 \sim \nu \left(\frac{y}{y_0}\right)^4$$

(мы воспользовались здесь соотношением (42,5)); $\chi_{\text{турб}}$ сравнивается по порядку величины с обычным коэффициентом χ на расстояниях $y_1 \sim y_0\mathrm{P}^{-1/4}$. Поскольку $\chi_{\text{турб}}$ очень быстро растет с y, то ясно, что основное изменение температуры в вязком подслое происходит на расстояниях от стенки порядка y_1 и его можно считать пропорциональным y_1, т. е. имеющим порядок величины

$$\frac{qy_1}{\varkappa} \sim \frac{qy_0}{\varkappa\mathrm{P}^{1/4}} \sim \frac{q}{\rho c_p v_*}\mathrm{P}^{3/4}.$$

Сравнивая с формулой (54,4), находим, что функция $f(\mathrm{P})$ будет иметь вид

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{const}\ \mathrm{P}^{3/4},$$

где const — численная постоянная.

3. Вывести соотношение, связывающее локальные корреляционные функции

$$B_{TT} = \langle (T_2 - T_1)^2\rangle, \quad B_{iTT} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(T_2 - T_1)^2\rangle$$

в неравномерно нагретом турбулентном потоке (*А. М. Яглом*, 1949).

Решение. Все вычисления аналогичны выводам в § 34. Наряду с функциями B_{TT} и B_{iTT} вводим вспомогательные функции

$$b_{TT} = \langle T_1T_2\rangle, \quad b_{iTT} = \langle v_{1i}T_1T_2\rangle,$$

и для облегчения рассуждений рассматриваем турбулентность как полностью однородную и изотропную. Имеем тогда:

$$B_{TT} = 2\langle T^2\rangle - 2b_{TT}, \quad B_{iTT} = 4b_{iTT} \tag{1}$$

(средние значения

$$\langle v_{1i}T_1T_2\rangle = -\langle v_{2i}T_1T_2\rangle,$$

а средние значения вида $\langle v_{1i}T_2^2\rangle$ обращаются в нуль в силу несжимаемости жидкости — ср. вывод (34,18)). С помощью уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \chi\,\Delta T, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

[1]) Для реальных значений коэффициента теплопроводности различных веществ число Прандтля не достигает тех больших значений, для которых мог бы иметь место этот предельный закон. Такие законы, однако, могут быть применены к конвективной диффузии, описывающейся теми же уравнениями, что и конвективная теплопередача, причем роль температуры играет концентрация растворенного вещества, роль теплового потока — поток этого вещества, а *диффузионное число Прандтля* определяется как $\mathrm{P}_D = \nu/D$, где D — коэффициент диффузии. Так, для растворов в воде и сходных жидкостях число P_D достигает значений порядка 10^3, а для растворов в очень вязких растворителях — 10^6 и более.

вычисляем производную

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{TT} = -2\frac{\partial}{\partial x_{1i}} b_{iTT} + 2\chi\Delta_1 b_{TT}. \qquad (2)$$

В силу тех же изотропии и однородности, функции b_{iTT} имеют вид

$$b_{iTT} = n_i b_{rTT}, \qquad (3)$$

(где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$), а b_{rTT} и b_{TT} зависят только от r. С учетом (1) и (3), уравнение (2) принимает вид

$$-2\varphi - \frac{\partial B_{TT}}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{div}(\mathbf{n}B_{rTT}) - \chi\,\Delta B_{TT} =$$
$$= \frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_{rTT}) - \frac{\chi}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial B_{TT}}{\partial r}\right),$$

где введена величина

$$\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle T'^2\rangle$$

(совпадающая с введенной в тексте). Поскольку локальную турбулентность можно считать стационарной, производной $\partial B_{TT}/\partial t$ пренебрегаем. Интегрируя оставшееся равенство по r, получим искомое соотношение (аналогичное (34,21):

$$B_{rTT} - 2\chi\frac{dB_{TT}}{dr} = -\frac{4}{3}r\varphi. \qquad (4)$$

При $r \gg \lambda_0$ член, содержащий χ, мал, а согласно (54,5) функция $B_{TT} \propto r^{2/3}$. Тогда из (4) имеем:

$$B_{rTT} \approx -\frac{4}{3}r\varphi.$$

На расстояниях же $r \ll \lambda_0$ имеем $B_{TT} \propto r^2$, а членом B_{rTT} можно пренебречь; тогда

$$B_{rr} \approx \frac{1}{3}r^2\varphi.$$

§ 55. Нагревание тела в движущейся жидкости

Термометр, погруженный в неподвижную жидкость, показывает температуру, равную температуре жидкости. Если же жидкость движется, то термометр покажет температуру несколько более высокую. Это обусловливается нагреванием благодаря внутреннему трению тормозящейся у поверхности термометра жидкости.

Общую задачу можно сформулировать следующим образом. Тело произвольной формы погружается в движущуюся жидкость; по истечении достаточного промежутка времени установится некоторое тепловое равновесие и требуется определить возникающую при этом разность температур $T_1 - T_0$ между ними.