вычисляем производную

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{TT} = -2\frac{\partial}{\partial x_{1i}} b_{iTT} + 2\chi\Delta_1 b_{TT}. \tag{2}$$

В силу тех же изотропии и однородности, функции b_{iTT} имеют вид

$$b_{iTT} = n_i b_{rTT}, \tag{3}$$

(где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$), а b_{rTT} и b_{TT} зависят только от r. С учетом (1) и (3), уравнение (2) принимает вид

$$-2\varphi - \frac{\partial B_{TT}}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{div}(\mathbf{n}B_{rTT}) - \chi\,\Delta B_{TT} =$$

$$= \frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_{rTT}) - \frac{\chi}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial B_{TT}}{\partial r}\right),$$

где введена величина

$$\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle T^2\rangle$$

(совпадающая с введенной в тексте). Поскольку локальную турбулентность можно считать стационарной, производной $\partial B_{TT}/\partial t$ пренебрегаем. Интегрируя оставшееся равенство по r, получим искомое соотношение (аналогичное (34,21):

$$B_{rTT} - 2\chi\frac{dB_{TT}}{dr} = -\frac{4}{3}r\varphi. \tag{4}$$

При $r \gg \lambda_0$ член, содержащий χ, мал, а согласно (54,5) функция $B_{TT} \propto r^{2/3}$. Тогда из (4) имеем:

$$B_{rTT} \approx -\frac{4}{3}r\varphi.$$

На расстояниях же $r \ll \lambda_0$ имеем $B_{TT} \propto r^2$, а членом B_{rTT} можно пренебречь; тогда

$$B_{rr} \approx \frac{1}{3}r^2\varphi.$$

§ 55. Нагревание тела в движущейся жидкости

Термометр, погруженный в неподвижную жидкость, показывает температуру, равную температуре жидкости. Если же жидкость движется, то термометр покажет температуру несколько более высокую. Это обусловливается нагреванием благодаря внутреннему трению тормозящейся у поверхности термометра жидкости.

Общую задачу можно сформулировать следующим образом. Тело произвольной формы погружается в движущуюся жидкость; по истечении достаточного промежутка времени установится некоторое тепловое равновесие и требуется определить возникающую при этом разность температур $T_1 - T_0$ между ними.

Решение этой задачи определяется уравнением (50,2), в котором, однако, теперь уже нельзя пренебречь членом, содержащим вязкость, как это было сделано в (53,1); именно этот член определяет интересующий нас здесь эффект. Таким образом, для установившегося состояния имеем уравнение

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \quad (55,1)$$

К нему должны быть присоединены уравнения движения (53,3) самой жидкости и, строго говоря, еще и уравнение теплопроводности внутри твердого тела. В предельном случае достаточно малой теплопроводности тела можно пренебречь ею вовсе и температуру каждой точки поверхности тела считать просто равной температуре жидкости в той же точке, получающейся в результате решения уравнения (55,1) с граничным условием $\partial T/\partial n = 0$, т. е. условием исчезновения потока тепла через поверхность тела. В обратном предельном случае достаточно большой теплопроводности тела можно приближенно потребовать одинаковости температуры во всех точках его поверхности; производная $\partial T/\partial n$ при этом, вообще говоря, не обращается в нуль на всей поверхности и следует требовать исчезновения лишь полного потока тепла через всю поверхность тела (т. е. интеграла от $\partial T/\partial n$ по этой поверхности). В обоих этих предельных случаях коэффициент теплопроводности тела не входит явно в решение задачи; ниже мы будем предполагать, что имеем дело с одним из них.

В уравнения (55,1) и (53,3) входят постоянные параметры χ, ν и c_p и, кроме того, в их решение войдут размеры тела l и скорость U набегающего потока. (Разность же температур $T_1 - T_0$ не является теперь произвольным параметром, а должна сама быть определена в результате решения уравнений.) Из этих параметров можно составить две независимые безразмерные комбинации, в качестве которых выберем R и P. Тогда можно утверждать, что искомая разность $T_1 - T_0$ равна какой-либо величине с размерностью температуры (в качестве таковой выберем U^2/c_p), умноженной на функцию от R и P:

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(\mathrm{R}, \mathrm{P}). \quad (55,2)$$

Легко определить вид этой функции в случае очень малых чисел Рейнольдса, т. е. достаточно малых скоростей U. Тогда член $\mathbf{v}\nabla T$ в (55,1) мал по сравнению с $\chi\Delta T$, так что уравнение (55,1) упрощается:

$$\chi \Delta T = -\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \quad (55,3)$$

Температура и скорость испытывают заметное изменение на протяжении расстояний порядка размеров l тела. Поэтому оценка обеих сторон уравнения (55,3) дает

$$\frac{\chi(T_1 - T_0)}{l^2} \sim \frac{\nu U^2}{c_p l^2}.$$

Таким образом, приходим к результату, что при малых R

$$T_1 - T_0 = \mathrm{const}\cdot \mathrm{P}\,\frac{U^2}{c_p}, \tag{55,4}$$

где const — численная постоянная, зависящая от формы тела. Отметим, что разность температур оказывается пропорциональной квадрату скорости U.

Некоторые общие заключения о виде функции $f(\mathrm{P}, \mathrm{R})$ в (55,2) можно сделать и в обратном предельном случае больших R, когда скорость и температура меняются только в узком пограничном слое. Пусть δ и δ' — расстояния, на которых меняются соответственно скорость и температура; δ и δ' отличаются друг от друга множителем, зависящим от P. Количество тепла, выделяемое в пограничном слое в единицу времени благодаря вязкости, дается интегралом (16,3). Отнесенное к единице площади поверхности тела, оно равно по порядку величины $\nu\rho(U/\delta)^2\delta = \nu\rho U^2/\delta$. С другой стороны, это тепло должно быть равно теплу, теряемому телом и равному потоку

$$q = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial n} \sim \chi c_p \rho\,\frac{T_1 - T_0}{\delta'}.$$

Сравнив оба выражения, приходим к результату

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(\mathrm{P}). \tag{55,5}$$

Таким образом, и в этом случае функция f оказывается не зависящей от R; зависимость же ее от P остается неопределенной.

Задачи

1. Определить распределение температуры в жидкости, совершающей пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре T_0.

Решение. В цилиндрических координатах с осью z по оси трубы имеем

$$v_z = v = 2\bar{v}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость течения. Подстановка в (55,3) приводит к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{16\bar{v}^2}{R^4}\frac{\nu}{\chi c_p}r^2.$$

Решение этого уравнения, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $T = T_0$ при $r = R$, есть

$$T - T_0 = \bar{v}^2\frac{\mathrm{P}}{c_p}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

2. Определить разность температур между твердым шаром и обтекающей его жидкостью при малых числах Рейнольдса; теплопроводность шара предполагается большой.

Решение. Выбираем сферические координаты r, θ, φ с началом в центре шара и полярной осью вдоль направления скорости и натекающего потока. Вычисляя компоненты тензора $\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i$ с помощью формул (15,20) и формулы (20,9) для скорости жидкости, обтекающей шар, получаем уравнение (53,3) в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=$$
$$=-A\frac{R^4}{r^4}\left[\cos^2\theta\left(3-\frac{6R^2}{r^2}+\frac{2R^4}{r^4}\right)+\frac{R^4}{r^4}\right],$$

где

$$A=\frac{9}{4}u^2\frac{\mathrm{P}}{c_p}.$$

Ищем $T(r,\theta)$ в виде

$$T=f(r)\cos^2\theta+g(r)$$

и получаем после отделения частей, зависящей и не зависящей от θ, два уравнения для f и g:

$$r^2f''+2rf'-6f=-A\left(\frac{3R^2}{r^2}-\frac{6R^4}{r^4}+\frac{2R^6}{r^6}\right),$$
$$r^2g''+2rg'+2f=-A\frac{R^6}{r^6}.$$

Из первого получаем:

$$f=A\left(\frac{3R^2}{4r^2}+\frac{R^4}{r^4}-\frac{1}{12}\frac{R^6}{r^6}\right)+\frac{c_1R^3}{r^3}$$

(член вида $\mathrm{const}\,r^2$ опускаем как не исчезающий на бесконечности), после чего второе приводит к решению

$$g=-\frac{A}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{R^2}{r^2}+\frac{1}{3}\frac{R^4}{r^4}+\frac{1}{18}\frac{R^6}{r^6}\right)-\frac{c_1R^3}{3r^3}+\frac{c_2R}{r}+c_3.$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются из условий

$$T=\mathrm{const}\quad\text{и}\quad\int\frac{\partial T}{\partial r}r^2\sin\theta\,d\theta=0\quad\text{при}\quad r=R,$$

что эквивалентно требованию

$$f(R)=0,\quad g'(R)+\frac{1}{3}f'(R)=0;$$

на бесконечности должно быть $T=T_0$. Находим:

$$c_1=-\frac{5}{3}A,\quad c_2=\frac{2}{3}A,\quad c_3=T_0.$$

Для разности температур шара ($T_1=T(R)$) и жидкости (T_0) получаем:

$$T_1-T_0=\frac{5}{8}\mathrm{P}\frac{u^2}{c_p}.$$

Заметим, что найденное распределение температуры оказывается удовлетворяющим и условию $\partial T/\partial r=0$ при $r=R$, т. е. $f'(R)=g'(R)=0$. Поэтому оно является одновременно и решением той же задачи в случае малой теплопроводности шара.