§ 56. Свободная конвекция

Мы видели в § 3, что если в находящейся в поле тяжести жидкости имеет место механическое равновесие, то распределение температуры в ней должно зависеть только от высоты z: $T=T(z)$. Если же распределение температуры не удовлетворяет этому требованию, являясь в общем случае функцией всех трех координат, то механическое равновесие в жидкости невозможно. Больше того, даже если $T=T(z)$, то механическое равновесие все же может оказаться невозможным, если вертикальный градиент температуры направлен вниз и по абсолютной величине превышает определенное предельное значение (§ 4).

Отсутствие механического равновесия приводит к возникновению в жидкости внутренних течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое возникающее в поле тяжести движение называют *свободной конвекцией*.

Выведем уравнения, описывающие конвекцию. Мы будем рассматривать жидкость как несжимаемую. Это значит, что давление предполагается достаточно мало меняющимся вдоль жидкости, так что изменением плотности под влиянием изменения давления можно пренебречь. Например, в атмосфере, где давление меняется с высотой, это значит, что мы не будем рассматривать слишком высоких ее столбов, в которых изменение плотности с высотой становится существенным. Что же касается изменения плотности благодаря неравномерной нагретости жидкости, то этим изменением, конечно, нельзя пренебречь. Именно оно приводит к появлению сил, вызывающих конвекционное движение.

Напишем переменную температуру в виде $T=T_0+T'$, где T_0 есть некоторое постоянное среднее значение, от которого отсчитывается неравномерность температуры T'. Будем предполагать, что T' мало по сравнению с T_0.

Плотность жидкости тоже напишем в виде $\rho=\rho_0+\rho'$ с постоянным ρ_0. Ввиду малости изменения температуры T' мало также и вызываемое им изменение плотности ρ', причем можно написать:

$$\rho'=\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial T}\right)_p T'=-\rho_0\beta T', \tag{56,1}$$

где $\beta=-\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)$ — *температурный коэффициент расширения жидкости* [1]).

В давлении же $p=p_0+p'$ величина p_0 не будет постоянной. Это — давление, соответствующее механическому равновесию при постоянных (равных T_0 и ρ_0) температуре и плотности. Оно меняется с высотой согласно гидростатическому

[1]) Будем полагать, что $\beta>0$.

уравнению

$$p_0 = \rho_0 \mathbf{g}\mathbf{r} + \text{const} = -\rho_0 g z + \text{const}, \tag{56,2}$$

где координата z отсчитывается вертикально вверх.

В столбе жидкости высотой h гидростатический перепад давления составляет $\rho_0 gh$. Этот перепад приводит к изменению плотности на $\sim\rho gh/c^2$, где c — скорость звука (см. ниже (64,4)). Согласно условию, это изменение должно быть пренебрежимо, причем не только по сравнению с самой плотностью, но и по сравнению с ее тепловым изменением (56,1). Другими словами, должно удовлетворяться неравенство

$$gh/c^2 \ll \beta\Theta, \tag{56,3}$$

где Θ — характерная разность температур.

Начнем с преобразования уравнения Навье — Стокса, которое при наличии поля тяжести имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g},$$

получающийся добавлением к правой стороне (15,7) действующей на единицу массы силы $\mathbf{g}$. Подставим сюда $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. С точностью до малых первого порядка имеем:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2}\rho',$$

или, подставляя (56,1) и (56,2):

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \mathbf{g}T'\beta.$$

Подставляя это выражение в уравнение Навье-Стокса и опуская индекс у ρ_0, получаем окончательно:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T'. \tag{56,4}$$

В уравнении теплопроводности (50,2) член, содержащий вязкость, при свободной конвекции, как можно показать, мал по сравнению с другими членами уравнения и потому может быть опущен. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T' = \chi\Delta T'. \tag{56,5}$$

Уравнения (56,4) и (56,5) вместе с уравнением непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ представляют собой полную систему уравнений, описывающих свободную конвекцию (*A. Oberbeck*, 1879; *J. Boussinesq*, 1903).

Для стационарного движения уравнения конвекции принимают вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} - \mathbf{g}\beta T' + \nu\Delta\mathbf{v}, \tag{56,6}$$

$$\mathbf{v}\nabla T' = \chi\Delta T', \tag{56,7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{56,8}$$

В эту систему пяти уравнений, определяющих неизвестные функции $\mathbf{v}$, p'/ρ, T', входят три параметра: ν, χ и $g\beta$. Кроме того, в их решение входят характерная длина h и характерная разность температур Θ. Характерная скорость теперь отсутствует, поскольку никакого вынужденного посторонними причинами движения нет, и все течение жидкости обусловливается ее неравномерной нагретостью. Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации (напомним, что температуре надо при этом приписывать особую размерность — см. § 53) В качестве них обычно выбирают число Прандтля $\mathrm{P} = \nu/\chi$ и *число Рэлея*[1]):

$$\mathscr{R} = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu\chi}. \tag{56,9}$$

Число Прандтля зависит только от свойств самого вещества жидкости; основной же характеристикой конвекции как таковой является число Рэлея.

Закон подобия для свободной конвекции гласит

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{h}\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{h}, \mathscr{R}, \mathrm{P}\right), \quad T = \Theta f\left(\frac{\mathbf{r}}{h}, \mathscr{R}, \mathrm{P}\right). \tag{56,10}$$

Два течения подобны, если их числа $\mathscr{R}$ и P одинаковы. Теплопередачу при конвекции в поле тяжести характеризуют числом Нуссельта, по-прежнему определенным согласно (53,7). Оно является теперь функцией только от $\mathscr{R}$ и P.

Конвективное движение может быть как ламинарным, так и турбулентным. Наступление турбулентности определяется числом Рэлея — конвекция становится турбулентной при очень больших значениях $\mathscr{R}$.

Задачи

1. Привести к решению обыкновенных дифференциальных уравнений задачу об определении числа Нуссельта при свободной конвекции у плоской вертикальной стенки. Предполагается, что скорость и разности температур заметно отличны от нуля лишь в тонком пограничном слое у поверхности стенки (*E. Pohlhausen*, 1921).

---

[1]) В литературе используется также *число Грассгофа*:

$$\mathrm{G} = g\beta\Theta h^3/\nu^2 = \mathscr{R}/\mathrm{P}.$$

Решение. Выбираем начало координат на нижнем краю стенки, ось x — вертикально в ее плоскости, а ось y — перпендикулярно стенке. В пограничном слое давление не меняется вдоль оси y (ср. § 39) и потому везде равно гидростатическому давлению $p_0(x)$, так что $p' = 0$. С обычной для пограничного слоя точностью уравнения (56,6—8) принимают вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g\beta (T - T_0),$$
$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$v_x = v_y = 0, \quad T = T_1 \quad \text{при} \quad y = 0; \qquad v_x = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad y = \infty$$

(T_1 — температура стенки, T_0 — температура жидкости вдали от стенки). Эти уравнения могут быть преобразованы в обыкновенные дифференциальные уравнения введением в качестве независимой переменной величины

$$\xi = \mathrm{G}^{1/4} \frac{y}{(4xh^3)^{1/4}}, \qquad \mathrm{G} = \frac{g\beta (T_1 - T_0) h^3}{\nu^2} \tag{2}$$

(h — высота стенки). Полагаем:

$$v_x = \frac{2\nu}{h^{3/2}} \mathrm{G}^{1/2} \sqrt{x}\, \varphi' (\xi), \quad T - T_0 = (T_1 - T_0)\, \theta (\xi). \tag{3}$$

Тогда последнее из уравнений (1) дает:

$$v_y = \frac{\nu \mathrm{G}^{1/4}}{(4xh^3)^{1/4}} (\xi\varphi' - 3\varphi),$$

а первые два дают уравнения для функций $\varphi(\xi)$ и $\theta(\xi)$:

$$\varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \quad \theta'' + 3\mathrm{P}\varphi\theta' = 0. \tag{4}$$

Из (3—4) следует, что толщина пограничного слоя $\delta \sim (xh^3/\mathrm{G})^{1/4}$. Условие применимости решения, $\delta \ll h$, выполняется при достаточно больших значениях G.

Полный поток тепла (отнесенный к единице площади стенки)

$$q = -\frac{1}{h} \int\limits_0^h \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_{y=0} dx = -\frac{4\varkappa}{3} \theta' (0; \mathrm{P}) (T_1 - T_0) \left(\frac{\mathrm{G}}{4h}\right)^{1/4}.$$

Число Нуссельта

$$\mathrm{N} = f(\mathrm{P}) \mathrm{G}^{1/4},$$

где функция $f(\mathrm{P})$ определяется решением уравнений (4).

2. Горячая турбулентная затопленная струя газа изгибается под влиянием поля тяжести; требуется определить ее форму (*Г. Н. Абрамович*, 1938).

Решение. Пусть T' — некоторое среднее (по сечению струи) значение разности температур в струе и в окружающем газе, u — некоторое среднее значение скорости газа в струе, а l — расстояние вдоль струи от точки ее выхода (l предполагается большим по сравнению с размерами выходного отверстия струи). Условие постоянства потока тепла Q вдоль струи гласит:

$$Q \sim \rho c_p T' u R^2 = \text{const},$$

а поскольку радиус турбулентной струи пропорционален l (ср. § 36), то

$$T'ul^2 = \text{const} \sim \frac{Q}{\rho c_p} \tag{1}$$

(заметим, что без учета поля тяжести $u \backsim 1/l$ — см. (36,3) — и из (1) следует, что $T' \backsim 1/l$).

Вектор потока импульса через поперечное сечение струи пропорционален $\rho u^2 R^2 \mathbf{n} \sim \rho u^2 l^2 \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления струи). Его горизонтальная составляющая постоянна вдоль струи:

$$u^2 l^2 \cos\theta = \text{const} \tag{2}$$

(θ — угол между $\mathbf{n}$ и горизонталью), а изменение вертикальной компоненты определяется действующей на струю подъемной силой. Последняя пропорциональна

$$\rho\beta T' R^2 g \sim \rho\beta T' l^2 g \sim \frac{\beta g Q}{c_p}\frac{1}{u}.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{d}{dl}(l^2u^2\sin\theta) \sim \frac{\beta g Q}{\rho c_p u}. \tag{3}$$

Ввиду (2) отсюда следует

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{dl} = \text{const}\, l\sqrt{\cos\theta},$$

откуда окончательно

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{(\cos\theta)^{5/2}} = \text{const}\cdot l^2 \tag{4}$$

(θ_0 определяет направление струи в точке ее выхода).

В частности, если на всем протяжении струи изменение угла θ незначительно, то (4) дает

$$\theta - \theta_0 = \text{const}\cdot l^2.$$

Это значит, что струя имеет форму кубической параболы, в которой отклонение d от прямоугольной траектории $d = \text{const}\cdot l^3$.

3. От неподвижного горячего тела поднимается вверх турбулентная (число Рэлея велико) струя нагретого газа. Определить закон изменения скорости и температуры струи с высотой (*Я. Б. Зельдович*, 1937).

Решение. Как и в предыдущем случае, радиус струи пропорционален расстоянию от источника, и аналогично (1) имеем:

$$T'uz^2 = \text{const},$$

а вместо (3)

$$\frac{d}{dz}(z^2u^2) = \frac{\text{const}}{u}$$

(z — высота над телом, предполагающаяся большой по сравнению с его размерами). Интегрируя последнее уравнение, найдем:

$$u \backsim z^{-1/3},$$

а для температуры соответственно

$$T' \backsim z^{-5/3}.$$

4. То же для ламинарной свободной восходящей конвективной струи (*Я. Б. Зельдович*, 1937).

Решение. Наряду с соотношением

$$T'uR^2 = \text{const},$$

выражающим постоянство потока тепла, имеем соотношение

$$u^2/z \sim \nu u/R^2 \sim g\beta T',$$

вытекающее из уравнения (56,6). Из этих соотношений находим следующие законы изменения радиуса, скорости и температуры струи с высотой:

$$R \propto \sqrt{z}, \quad u = \text{const}, \quad T' \propto 1/z.$$

Заметим, что число

$$\mathcal{R} \propto T'R^3 \propto \sqrt{z}$$

растет с высотой; поэтому на некоторой высоте струя становится турбулентной.

§ 57. Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости

Если в заданной конфигурации жидкости и твердых стенок постепенно увеличивать число Рэлея, то наступит момент, когда состояние покоя жидкости становится неустойчивым по отношению к сколь угодно малым возмущениям[1]). В результате возникает конвекция, причем переход от режима чистой теплопроводности в неподвижной жидкости к конвективному режиму совершается непрерывным образом. Поэтому зависимость числа Нуссельта от $\mathcal{R}$ при этом переходе не испытывает скачка, а лишь излом.

Теоретическое определение критического значения $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ должно производиться по схеме, уже объясненной в § 26. Повторим ее здесь применительно к данному случаю.

Представим T' и p' в виде

$$T' = T_0' + \tau, \quad p' = p_0' + \rho w, \tag{57;1}$$

где T_0' и p_0' относятся к неподвижной жидкости, а τ и w — возмущение. T_0' и p_0' удовлетворяют уравнениям

$$\Delta T_0' = \frac{d^2T_0'}{dz^2} = 0, \qquad \frac{dp_0'}{dz} = \rho g\beta T_0'.$$

Из первого имеем $T_0' = -Az$, где A — постоянная; в интересующем нас случае подогрева жидкости снизу эта постоянная $A > 0$.

В уравнениях (56,4—5) малыми величинами являются $\mathbf{v}$ (невозмущенная скорость отсутствует), τ и w. Опустив квадратич-

[1]) Не смешивать эту неустойчивость с конвективной неустойчивостью, о которой шла речь в § 28!