4. То же для ламинарной свободной восходящей конвективной струи (*Я. Б. Зельдович*, 1937).

Решение. Наряду с соотношением

$$T'uR^2 = \text{const},$$

выражающим постоянство потока тепла, имеем соотношение

$$u^2/z \sim \nu u/R^2 \sim g\beta T',$$

вытекающее из уравнения (56,6). Из этих соотношений находим следующие законы изменения радиуса, скорости и температуры струи с высотой:

$$R \propto \sqrt{z}, \quad u = \text{const}, \quad T' \propto 1/z.$$

Заметим, что число

$$\mathcal{R} \propto T'R^3 \propto \sqrt{z}$$

растет с высотой; поэтому на некоторой высоте струя становится турбулентной.

§ 57. Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости

Если в заданной конфигурации жидкости и твердых стенок постепенно увеличивать число Рэлея, то наступит момент, когда состояние покоя жидкости становится неустойчивым по отношению к сколь угодно малым возмущениям[1]). В результате возникает конвекция, причем переход от режима чистой теплопроводности в неподвижной жидкости к конвективному режиму совершается непрерывным образом. Поэтому зависимость числа Нуссельта от $\mathcal{R}$ при этом переходе не испытывает скачка, а лишь излом.

Теоретическое определение критического значения $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ должно производиться по схеме, уже объясненной в § 26. Повторим ее здесь применительно к данному случаю.

Представим T' и p' в виде

$$T' = T'_0 + \tau, \quad p' = p'_0 + \rho w, \tag{57;1}$$

где T'_0 и p'_0 относятся к неподвижной жидкости, а τ и w — возмущение. T'_0 и p'_0 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta T'_0 = \frac{d^2T'_0}{dz^2} = 0, \qquad \frac{dp'_0}{dz} = \rho g\beta T'_0.$$

Из первого имеем $T'_0 = -Az$, где A — постоянная; в интересующем нас случае подогрева жидкости снизу эта постоянная $A > 0$.

В уравнениях (56,4—5) малыми величинами являются $\mathbf{v}$ (невозмущенная скорость отсутствует), τ и w. Опустив квадратич-

---

[1]) Не смешивать эту неустойчивость с конвективной неустойчивостью, о которой шла речь в § 28!

ные члены и рассматривая возмущения, зависящие от времени как $e^{-i\omega t}$, получим уравнения:

$$-i\omega\mathbf{v} = -\nabla w + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\tau\mathbf{g},$$
$$-i\omega\tau - Av_z = \chi\Delta\tau, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Целесообразно записать эти уравнения в безразмерном виде, введя следующие единицы измерения всех фигурирующих в них величин: для длины, частоты, скорости, давления и температуры это будут соответственно h, ν/h^2, ν/h, $\rho\nu^2/h^2$ и $Ah\nu/\chi$. Ниже в этом параграфе (а также в задачах к нему) все буквы обозначают соответствующие безразмерные величины. Уравнения принимают вид:

$$-i\omega\mathbf{v} = -\nabla w + \Delta\mathbf{v} + \mathcal{R}\tau\mathbf{n}, \tag{57,2}$$
$$-i\omega\tau\mathrm{P} = \Delta\tau + v_z, \tag{57,3}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{57,4}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении оси z, — вертикально вверх). Здесь ясно выступают безразмерные параметры $\mathcal{R}$ и P. Если граничащие с жидкостью твердые поверхности поддерживаются при постоянных температурах, то на них должны выполняться условия[1])

$$\mathbf{v} = 0, \quad \tau = 0. \tag{57,5}$$

Уравнения (57,2—4) с граничными условиями (57,5) определяют спектр собственных частот ω. При $\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{кр}}$ их мнимые части $\gamma \equiv \operatorname{Im}\omega < 0$ и возмущения затухают. Значение $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ определяется моментом, когда (по мере увеличения $\mathcal{R}$) впервые появляется собственное значение частоты с $\gamma > 0$; при $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{кр}}$ значение γ проходит через нуль.

Задача о конвективной неустойчивости неподвижной жидкости обладает той спецификой, что все собственные значения $i\omega$ вещественны, так что возмущения затухают или усиливаются монотонно, без колебаний. Соответственно, и возникающее в результате неустойчивости неподвижной жидкости устойчивое движение стационарно. Покажем это для жидкости, заполняющей замкнутую полость, с граничными условиями (57,5) на ее стенках[2]).

---

[1]) Мы рассматриваем простейшие граничные условия, отвечающие идеально теплопроводящим стенкам. При конечной теплопроводности стенок к системе уравнений должно было бы быть добавлено еще и уравнение распространения тепла в стенке. Мы не рассматриваем также случаев, когда жидкость имеет свободную поверхность. В таких случаях, строго говоря, должна была бы учитываться деформация поверхности в результате возмущения, и появляющиеся при этом силы поверхностного натяжения.

[2]) В этом выводе и дальнейшей формулировке вариационного принципа мы следуем *В. С. Сорокину* (1953).

Умножим уравнения (57,2) и (57,3) соответственно на v^* и τ^* и проинтегрируем их по объему полости. Проинтегрировав члены $\mathbf{v}^*\Delta\mathbf{v}$ и $\tau^*\Delta\tau$ по частям [1]) и заметив, что интегралы по поверхности полости обращаются в нуль в силу граничных условий, получим:

$$\begin{aligned} -i\omega\int|\mathbf{v}|^2\,dV &= \int\left(-|\operatorname{rot}\mathbf{v}|^2+\mathcal{R}\tau v_z^*\right)dV, \\ -i\omega \mathrm{P}\int|\tau|^2\,dV &= \int\left(-|\nabla\tau|^2+\tau^* v_z\right)dV. \end{aligned} \tag{57,6}$$

Вычитая из этих равенств их комплексно-сопряженные, находим:

$$-i(\omega+\omega^*)\int|\mathbf{v}|^2\,dV = \mathcal{R}\int\left(\tau v_z^*-\tau^* v_z\right)dV,$$

$$-i(\omega+\omega^*)\,\mathrm{P}\int|\tau|^2\,dV = -\int\left(\tau v_z^*-\tau^* v_z\right)dV.$$

Наконец, умножив второе равенство на $\mathcal{R}$ и сложив с первым, получим:

$$\operatorname{Re}\omega\int\left(|\mathbf{v}|^2+\mathcal{R}\mathrm{P}|\tau|^2\right)dV=0.$$

В виду существенной положительности интеграла, отсюда следует искомый результат $\operatorname{Re}\omega=0$ [2]). Отметим, что при $A<0$ (жидкость подогревается сверху), чему формально отвечает $\mathcal{R}<0$, интеграл мог бы обращаться в нуль и $i\omega$ могло бы быть комплексным.

Вернемся к равенствам (57,6). Умножив теперь второе на $\mathcal{R}$ и сложив с первым, получим для инкремента $\gamma=-i\omega$ следующее выражение:

$$-\gamma=J/N, \tag{57,7}$$

---

[1]) С использованием равенств

$$\mathbf{v}^*\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{v}^*\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{div}\left[\mathbf{v}^*\operatorname{rot}\mathbf{v}\right]-|\operatorname{rot}\mathbf{v}|^2,$$

$$\tau^*\Delta\tau = \operatorname{div}\left(\tau^*\nabla\tau\right)-|\nabla\tau|^2,\quad \mathbf{v}\Delta w=\operatorname{div}(w\mathbf{v}).$$

[2]) С математической точки зрения, изложенный вывод сводится к доказательству самосопряженности системы уравнений (57, 2—4). С физической точки зрения, происхождение этого результата можно пояснить следующими соображениями. Пусть при возмущении элемент жидкости смещается, например, наверх. Попав в окружение менее нагретой жидкости, он будет охлаждаться за счет теплопроводности, оставаясь все же более нагретым, чем окружающая среда. Поэтому действующая на него сила плавучести будет направлена вверх и элемент будет продолжать движение в том же направлении — затухающее или ускоряющееся в зависимости от соотношения между градиентом температуры и диссипативными коэффициентами. В обоих случаях ввиду отсутствия «возвращающей силы» колебания не возникают. Отметим, что при наличии свободной поверхности возвращающая сила возникает за счет поверхностного натяжения, стремящегося сгладить деформированную поверхность; при учете этой силы сделанные утверждения уже не справедливы.

где J и N обозначают интегралы

$$J=\int[(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2+\mathscr{R}(\nabla\tau)^2-2\mathscr{R}\tau v_z]\,dV,\quad N=\int(\mathbf{v}^2+\mathscr{R}\mathrm{P}\tau^2)\,dV \qquad (57,8)$$

(функции $\mathbf{v}$ и τ предполагаются вещественными). Как известно, задача о собственных значениях самосопряженных линейных дифференциальных операторов допускает вариационную формулировку, основанную именно на выражении вида (57,7—8). Рассматривая J и N как функционалы по отношении к функциям $\mathbf{v}$ и τ, потребуем экстремальности J при дополнительных условиях $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ и $N=1$; последнее играет роль «условия нормировки». По общим правилам вариационного исчисления, составляем вариационное уравнение

$$\delta J+\gamma\delta N-\int 2w\delta(\operatorname{div}\mathbf{v})\,dV=0, \qquad (57,9)$$

где константа γ и функция $w(\mathbf{r})$ играют роль лагранжевых неопределенных множителей. Вычислив входящие сюда вариации (произведя при этом интегрирования по частям с учетом граничных условий (57,5)) и приравнивая нулю выражения при независимых вариациях $\delta\mathbf{v}$ и $\delta\tau$, действительно получим уравнения (57,2—3). Значение J, вычисленное по поставленной таким образом вариационной задаче, определяет согласно (57,7) наименьшее значение $-\gamma=-\gamma_1$, т. е. инкремент наиболее быстро усиливающихся (или декремент наименее быстро убывающих — в зависимости от знака γ) возмущений.

По смыслу его вывода, критическое значение $\mathscr{R}_{\text{кр}}$ определяет границу устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям. Но для задачи о конвективной устойчивости неподвижной жидкости оказывается, что это число является в тоже время границей устойчивости по отношению к любым конечным возмущениям[1]). Другими словами, при $\mathscr{R}<\mathscr{R}_{\text{кр}}$ не существует никаких незатухающих со временем решений уравнений движения, за исключением состояния покоя. Покажем это (*В. С. Сорокин*, 1954).

Для конечных возмущений уравнения движения должны быть написаны в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla w+\Delta\mathbf{v}+\mathscr{R}\tau\mathbf{n}-(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v},\quad \mathrm{P}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\Delta\tau+v_z-\mathrm{P}\mathbf{v}\nabla\tau, \qquad (57,10)$$

отличающемся от (57,2—3) нелинейными членами. Проделаем с этими уравнениями в точности те же операции, которые были произведены выше с уравнениями (57,2—3) при выводе соотно-

[1]) Говоря о возмущениях конечной интенсивности, мы имеем здесь в виду возмущения, для которых в уравнениях (56,4—5) нельзя пренебрегать нелинейными членами, но в то же время по-прежнему удовлетворяются условия, поставленные при выводе этих уравнений.

шений (57,6) и (57,7). Ввиду равенства $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, нелинейные члены сводятся к полным дивергенциям:

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \operatorname{div}\left(\frac{v^2}{2}\mathbf{v}\right), \quad \tau(\mathbf{v}\nabla)\tau = \operatorname{div}\left(\frac{\tau^2}{2}\mathbf{v}\right)$$

и при интегрировании выпадают. Поэтому мы получим в результате соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{dN}{dt} = -J,$$

отличающееся от равенства $\gamma N = -J$ (57,7) лишь тем, что вместо произведения γN теперь стоит производная по времени. В силу сформулированного выше вариационного принципа, для любых функций $\mathbf{v}$ и τ будет $-J \leqslant \gamma_1 N$. Поэтому

$$\frac{dN(t)}{dt} \leqslant 2\gamma_1 N(t),$$

откуда

$$N(t) \leqslant N(0)\, e^{2\gamma_1 t}. \tag{57,11}$$

Но в подкритической ($\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{кр}}$) области все полученные по линейной теории инкременты, в том числе наибольший из них γ_1, отрицательны. Поэтому из (57,11) следует, что $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а ввиду существенной положительности подынтегрального выражения в N стремятся к нулю также и сами функции $\mathbf{v}$ и τ.

Вернемся к вопросу о вычислении $\mathcal{R}_{\text{кр}}$. Поскольку все собственные значения $i\omega$ вещественны, то равенство $\gamma = 0$ при $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{кр}}$ означает, что и $\omega = 0$. Значение $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ определяется тогда как наименьшее из собственных значений параметра $\mathcal{R}$ в системе уравнений

$$\begin{gathered} \Delta \mathbf{v} - \nabla w + \mathcal{R}\tau\mathbf{n} = 0, \\ \Delta\tau = -v_z, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{gathered} \tag{57,12}$$

(эта задача тоже допускает вариационную формулировку — см. задачу 2). Обратим внимание на то, что ни сами уравнения (57,12), ни граничные условия к ним не содержат числа P. Поэтому и определяемое ими критическое число Рэлея для заданной конфигурации жидкости и твердых стенок не зависит от вещества жидкости.

Наиболее простой и в то же время теоретически важной является задача[1]) об устойчивости слоя жидкости между двумя неограниченными горизонтальными плоскостями, из которых

---

[1]) Впервые поставленная экспериментально *Бенаром* (*H. Bénar*, 1900) и рассматривавшаяся теоретически *Рэлеем* (*Rayleigh*, 1916).

верхняя поддерживается при более низкой температуре, чем нижняя.

Для этой задачи удобно привести систему (57,12) к одному уравнению [1]). Применив к первому уравнению операцию $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \nabla\operatorname{div} - \Delta$, взяв затем его z-компоненту и воспользовавшись двумя другими уравнениями, получим:

$$\Delta^3\tau = \mathcal{R}\Delta_2\tau, \tag{57,13}$$

(где $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двухмерный лапласиан). Граничные условия на обоих плоскостях:

$$\tau = 0, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \ 1$$

(последнее эквивалентно, ввиду уравнения непрерывности, условиям $v_x = v_y = 0$ при всех x, y). Ввиду второго из уравнений (57,12) условия для v_z можно заменить условиями для высших производных от τ:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3\tau}{\partial z^3} - k^2\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Ищем τ в виде

$$\tau = f(z)\varphi(x, y), \quad \varphi = e^{i\mathbf{kr}}, \tag{57,14}$$

(где $\mathbf{k}$ — вектор в плоскости x, y) и получаем для $f(z)$ уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 f + \mathcal{R}k^2 f = 0.$$

Общее решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию функций $\operatorname{ch}\mu z$ и $\operatorname{sh}\mu z$, где

$$\mu^2 = k^2 - \mathcal{R}^{1/3}k^{2/3}\sqrt[3]{1}$$

с тремя различными значениями корня. Коэффициенты этой комбинации определяются граничными условиями, приводящими к системе алгебраических уравнений, условие совместности которых дает трансцендентное уравнение, корни которого и определяют зависимости $k = k_n(\mathcal{R})$, $n = 1, 2, \ldots$. Обратные функции $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n(k)$ имеют минимум при определенных значениях k; наименьший из этих минимумов и дает значение $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ [2]). Оно

---

[1]) Вещественность $i\omega$ для этой задачи была доказана *Пелью* и *Саутвеллом* (*A. Pellew, R. V. Southwell*, 1940).

[2]) Детали вычислений можно найти в книге: *Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий*, Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, «Наука», 1972, а также в указанных на с. 145 книгах *С. Чандрасекхара* и *Дразина* и *Рейда*.

оказывается равным 1708, причем соответствующее значение волнового числа $k_{\text{кр}} = 3{,}12$ в единицах $1/h$ (*H. Jeffreys*, 1908).

Таким образом, горизонтальный слой жидкости толщины h с направленным вниз градиентом температуры A становится неустойчивым при[1])

$$\frac{g\beta A h^3}{\nu\chi} > 1708. \tag{57,15}$$

При $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{\text{кр}}$ в жидкости возникает стационарное конвективное движение, периодическое в плоскости xy. Все пространство между плоскостями разделяется на прилегающие друг к другу одинаковые ячейки, в каждой из которых жидкость движется по замкнутым траекториям, не переходя из одной ячейки в другую. Контуры этих ячеек на граничных плоскостях образуют в них некоторую решетку. Значение $k_{\text{кр}}$ определяет периодичность, но не симметрию этой решетки; линеаризованные уравнения движения допускают в (57,14) любую функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $(\Delta_2 - k^2)\varphi = 0$. Устранение этой неоднозначности в рамках линейной теории невозможно. По-видимому, должна осуществляться «двухмерная» структура движения, в которой на плоскости xy имеется лишь одномерная периодичность — система параллельных полос[2]).

Задачи

1. Найти критическое число Рэлея для возникновения конвекции в жидкости в вертикальной цилиндрической трубе, вдоль которой поддерживается постоянный градиент температуры; стенки трубы *а*) идеально теплопроводящие, или *б*) теплоизолирующие (*Г. А. Остроумов*, 1946).

Решение. Ищем решение уравнений (57,2—4), в котором конвективная скорость $\mathbf{v}$ направлена везде по оси трубы (ось z), а вся картина движения постоянна вдоль этой оси, т. е. величины $v_z = v$, τ, $\partial w/\partial z$ зависят

---

[1]) При заданном значении A это условие во всяком случае выполняется при достаточно большом h. Во избежание недоразумений следует напомнить, что речь идет здесь лишь о таких высотах h, при которых несущественно изменение плотности жидкости под влиянием поля тяжести. Поэтому к высоким столбам жидкости этот критерий неприменим В таком случае следует применять критерий, полученный в § 4, из которого видно, что конвекция может отсутствовать при любой высоте столба, если градиент температуры не слишком велик.

[2]) Теоретические указания состоят в том, что в надкритической области вблизи $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ лишь эта структура оказывается устойчивой по отношению к малым возмущениям; «трехмерные» же призматические структуры оказываются неустойчивыми. Экспериментальные результаты существенно зависят от условий опыта (в том числе от формы и размеров боковых стенок сосуда) и не однозначны. Наблюдавшаяся в ряде случаев трехмерная гексагональная структура связана, по-видимому, с влиянием поверхностного натяжения на верхней свободной поверхности, и с температурной зависимостью вязкости жидкости (в изложенной теории вязкость ν рассматривалась, конечно, как постоянная).

только от координат в плоскости сечения трубы [1]). Уравнения принимают вид

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \Delta_2 v = -\mathcal{R}\tau + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta_2 \tau = v$$

(число $\mathcal{R} = g\beta A R^4/\chi\nu$, R — радиус трубы). Из первых двух уравнений следует, что $\partial w/\partial z = \mathrm{const}$, а исключив из остальных уравнений τ, получим

$$\Delta_2^2 v = \mathcal{R} v.$$

На стенках трубы ($r = 1$) должны удовлетворяться условие $v = 0$ и условие $\tau = 0$ (в случае *а*) или $\partial\tau/\partial r = 0$ (в случае *б*). Кроме того, должен быть равен нулю полный поток жидкости через поперечное сечение трубы.

Уравнение имеет решения вида

$$\cos n\varphi . J_n(kr), \quad \cos n\varphi . I_n(kr),$$

где J_n, I_n — функции Бесселя вещественного и мнимого аргумента, а $k^4 = \mathcal{R}$; r, φ — полярные координаты в плоскости сечения трубы. Моменту возникновения конвекции отвечает то решение, которому соответствует наименьшее значение $\mathcal{R}$. Оказывается, что таковым является решение с $n = 1$:

$$v = v_0 \cos\varphi \,[J_1(kr) I_1(k) - I_1(kr) J_1(k)],$$

$$\tau = \frac{v_0}{\mathcal{R}^{1/2}} \cos\varphi \,[J_1(kr) I_1(k) + I_1(kr) J_1(k)]$$

(причем градиент $\partial w/\partial z = 0$). Описываемое этими формулами движение антисимметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось трубы и делящей полость на две части; в одной из них жидкости опускается, а в другой поднимается. Написанное решение удовлетворяет условию $v = 0$ при $r = 1$. В случае *а* условие $\tau = 0$ приводит к уравнению $J_1(k) = 0$; его наименьший корень дает критическое число $\mathcal{R}_{\text{кр}} = k^4 = 216$. В случае *б* условие $\partial\tau/\partial r = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{J_0(k)}{J_1(k)} + \frac{I_0(k)}{I_1(k)} = \frac{2}{k}.$$

Наименьший корень этого уравнения дает $\mathcal{R}_{\text{кр}} = 68$.

2. Сформулировать вариационный принцип для задачи о собственных значениях $\mathcal{R}$, определяемых уравнениями (57,12).

Решение. Придадим уравнениям (57,12) более симметричный вид, введя вместо τ новую функцию $\tilde{\tau} = \sqrt{\mathcal{R}}\,\tau$, т. е. снова изменив единицу измерения температуры. Тогда:

$$\sqrt{\mathcal{R}}\,\tilde{\tau}\mathbf{n} = \nabla w - \Delta\mathbf{v}, \quad \sqrt{\mathcal{R}}\,v_z = -\Delta\tilde{\tau}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Поступая, как при выводе (57,7), получим $\sqrt{\mathcal{R}} = J/N$, где

$$J = \frac{1}{2}\int [(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2 + (\nabla\tilde{\tau})^2]\, dV, \quad N = \int v_z \tilde{\tau}\, dV$$

(интеграл N положителен, в чем легко убедиться, приведя его к виду $\mathcal{R}^{-1/2}\int (\nabla\tilde{\tau})^2 dV$). Вариационный принцип формулируется, как требование экстремальности J при дополнительных условиях $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и $N = 1$. Минимальное значение J определяет наименьшее собственное значение $\sqrt{\mathcal{R}}$.

[1]) Уравнения имеют также решения, периодические вдоль оси z, содержащие множитель $\exp(ikz)$. Все они, однако, приводят к более высоким значениям $\mathcal{R}_{\text{кр}}$. Обратим внимание на то, что рассматриваемое решение с $k = 0$ удовлетворяет также и точным (нелинеаризованным) уравнениям (57,10) ввиду тождественного обращения в нуль нелинейных членов $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}\nabla\tau$.