ГЛАВА VII

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 61. Формула Лапласа

В этой главе мы изучим явления, происходящие вблизи поверхности раздела между двумя сплошными средами (в действительности, конечно, соприкасающиеся тела разделены узким переходным слоем, который вследствие его весьма малой толщины можно рассматривать как поверхность).

Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой *поверхностным давлением*) напишем условие термодинамического равновесия обоих тел друг с другом с учетом свойств поверхности их раздела.

Пусть поверхность раздела подвергается бесконечно малому смещению. В каждой точке несмещенной поверхности проведем нормаль к ней. Отрезок нормали, заключенный между ее пересечениями с несмещенной и смещенной поверхностями, обозначим посредством $\delta\zeta$. Тогда объем каждого элемента пространства, заключенного между поверхностями, есть $\delta\zeta df$, где df — элемент поверхности. Пусть p_1 и p_2 — давления в первой и второй средах и будем считать $\delta\zeta$ положительным, если смещение поверхности раздела производится, скажем, в сторону второй среды. Тогда работа, которую надо произвести для описанного изменения объема, равна

$$\int (-p_1 + p_2)\,\delta\zeta\, df.$$

Полная работа δR смещения поверхности получится путем прибавления сюда еще работы, связанной с изменением площади самой этой поверхности. Эта часть работы пропорциональна, как известно, изменению δf площади поверхности и равна $\alpha\delta f$, где α — *поверхностное натяжение*. Таким образом, полная работа равна

$$\delta R = -\int (p_1 - p_2)\,\delta\zeta\, df + \alpha\delta f. \qquad (61,1)$$

Условие термодинамического равновесия определяется, как известно, обращением δR в нуль.

Пусть далее R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности; мы будем считать R_1 и R_2 положительными, если они направлены внутрь первой среды. Тогда элементы длины dl_1 и dl_2 на поверхности, проведенные в плоскостях ее главных сечений, получают при бесконечно малом смещении поверхности приращения, равные соответственно $\frac{\delta\zeta}{R_1}dl_1$ и $\frac{\delta\zeta}{R_2}dl_2$ (dl_1 и dl_2 надо рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами R_1 и R_2). Поэтому элемент поверхности $df = dl_1 dl_2$ будет равен после смещения

$$dl_1\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}\right)dl_2\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right) \approx dl_1\,dl_2\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right),$$

т. е. изменится на величину

$$\delta\zeta\,df\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда видно, что полное изменение площади поверхности раздела есть

$$\delta f = \int \delta\zeta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)df. \tag{61,2}$$

Подставляя полученные выражения в (61,1) и приравнивая нулю, получим условие равновесия в виде

$$\int \delta\zeta\left\{(p_1-p_2)-\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right\}df = 0.$$

Это условие должно выполняться при произвольном бесконечно малом смещении поверхности, т. е. при произвольном $\delta\zeta$. Поэтому необходимо, чтобы стоящее под интегралом в скобках выражение тождественно обращалось в нуль, т. е.

$$p_1 - p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \tag{61,3}$$

Это и есть формула (*формула Лапласа*), определяющая поверхностное давление[1]). Мы видим, что если R_1 и R_2 положительны, то $p_1 > p_2$. Это значит, что из двух тел давление больше в том, поверхность которого выпукла. Если $R_1 = R_2 = \infty$, т. е. поверхность раздела плоская, то давления в обоих телах, как и должно было быть, одинаковы.

Применим формулу (61,3) для исследования механического равновесия соприкасающихся тел. Предположим, что ни на поверхность раздела, ни на сами тела не действуют никакие внешние силы. Тогда вдоль каждого из тел давление постоянно. Имея в виду формулу (61,3), мы можем поэтому написать условие равновесия в виде

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \text{const} \tag{61,4}$$

[1]) Изложенный вывод отличается от данного в V, § 156, по существу, лишь тем, что здесь рассматривается поверхность раздела произвольной формы, а не только сферической.

Таким образом, сумма обратных радиусов кривизны должна быть постоянной вдоль всей свободной поверхности раздела. Если вся поверхность свободна, то условие (60,4) означает, что поверхность должна иметь шарообразную форму (например, поверхность маленькой капли, влиянием силы тяжести на которую можно пренебречь). Если же поверхность закреплена вдоль какой-нибудь линии (например, у жидкой пленки на твердой рамке), то ее форма является более сложной.

В применении к равновесию тонких пленок жидкости, закрепленных на твердой рамке, в условии (61,4) справа должен стоять нуль. Действительно, сумма $1/R_1 + 1/R_2$ должна быть одинаковой вдоль всей свободной поверхности пленки и в то же время на двух своих сторонах она должна иметь противоположный знак, поскольку если одна сторона выпукла, то другая вогнута с теми же радиусами кривизны, которые, однако, должны считаться теперь отрицательными. Отсюда следует, что условие равновесия тонкой пленки есть

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \tag{61,5}$$

Рассмотрим теперь условие равновесия на поверхности тела, находящегося в поле тяжести. Предположим для простоты, что второй средой является просто атмосфера, давление которой на протяжении размеров тела можно считать постоянным. В качестве самого тела рассмотрим несжимаемую жидкость. Тогда имеем $p_2 = \text{const}$, а давление p_1 в жидкости равно согласно (3,2) $p_1 = \text{const} - \rho g z$ (координата z отсчитывается вертикально вверх). Таким образом, условие равновесия приобретает вид

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{g\rho}{\alpha} z = \text{const} \tag{61,6}$$

Надо, впрочем, отметить, что для определения равновесной формы поверхности жидкости в конкретных случаях обычно бывает удобным пользоваться условием равновесия не в виде (61,6), а непосредственно решая вариационную задачу о минимуме полной свободной энергии. Внутренняя свободная энергия жидкости зависит только от объема, но не от формы поверхности. От формы зависит, во-первых, поверхностная свободная энергия

$$\int \alpha \, df$$

и, во-вторых, энергия во внешнем поле (поле тяжести), равная

$$g\rho \int z \, dV.$$

Таким образом, условие равновесия можно написать в виде

$$\alpha \int df + g\rho \int z \, dV = \min. \tag{61,7}$$

Определение минимума должно производиться при дополнительном условии

$$\int dV = \text{const}, \tag{61,8}$$

выражающем неизменность полного объема жидкости.

Постоянные α, ρ, g входят в условия равновесия (61,6—7) только в виде отношения $\frac{\alpha}{g\rho}$. Это отношение имеет размерность квадрата длины. Длину

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\rho}} \tag{61,9}$$

называют *капиллярной постоянной*[1]). Форма поверхности жидкости определяется только этой величиной. Если капиллярная постоянная велика (по сравнению с размерами тела), то при определении формы поверхности можно пренебречь полем тяжести.

Для того чтобы определить из условия (61,4) или (61,6) форму поверхности, надо иметь формулы, определяющие радиусы кривизны по форме поверхности. Эти формулы известны из дифференциальной геометрии, но имеют в общем случае довольно сложный вид. Они значительно упрощаются в том случае, когда форма поверхности лишь слабо отклоняется от плоской. Мы выведем здесь соответствующую приближенную формулу непосредственно, не пользуясь общей формулой дифференциальной геометрии.

Пусть $z = \zeta(x, y)$ — уравнение поверхности; мы предполагаем, что ζ везде мало, т. е. что поверхность слабо отклоняется от плоскости $z = 0$. Как известно, площадь f поверхности определяется интегралом

$$f = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

или приближенно при малых ζ

$$f = \int \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy. \tag{61,10}$$

Определим вариацию δf:

$$\delta f = \int \left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right\} dx\, dy.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\delta f = -\int \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) \delta\zeta\, dx\, dy.$$

---

[1]) Так, для воды $a = 0{,}39$ см (при 20 °С).

Сравнив это выражение с (61,2), получаем:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right). \tag{61,11}$$

Это и есть искомая формула, определяющая сумму обратных радиусов кривизны слабо изогнутой поверхности.

При равновесии трех соприкасающихся друг с другом фаз их поверхности раздела устанавливаются таким образом, чтобы была равна нулю равнодействующая трех сил поверхностного натяжения, действующих на общую линию соприкосновения трех сред. Это условие приводит к тому, что поверхности раздела должны пересекаться друг с другом под углами (так называемые краевые углы), определяющимися значениями поверхностного натяжения.

Наконец, остановимся на вопросе о граничных условиях, которые должны соблюдаться на границе двух движущихся жидкостей при учете сил поверхностного натяжения. Если поверхностное натяжение не учитывается, то на границе двух жидкостей имеем:

$$n_k\left(\sigma_{ik}^{(2)}-\sigma_{ik}^{(1)}\right)=0,$$

что выражает равенство сил трения, действующих на поверхности обеих жидкостей. При учете поверхностного натяжения надо написать в правой части этого условия дополнительную силу, определяемую по величине формулой Лапласа и направленную по нормали к поверхности:

$$n_k\sigma_{ik}^{(2)}-n_k\sigma_{ik}^{(1)}=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i. \tag{61,12}$$

Иначе можно написать это уравнение в виде

$$(p_1-p_2)\,n_i=\left(\sigma'^{(1)}_{ik}-\sigma'^{(2)}_{ik}\right)n_k+\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i. \tag{61,13}$$

Если обе жидкости можно считать идеальными, то вязкие напряжения σ'_{ik} исчезают, и мы получаем вновь простое уравнение (61,3).

Условие (61,13), однако, еще не является наиболее общим. Дело в том, что коэффициент поверхностного натяжения α может оказаться не постоянным вдоль поверхности (например, в результате непостоянства температуры). Тогда наряду с нормальной силой (исчезающей в случае плоской поверхности) появляется некоторая дополнительная сила, направленная тангенциально к поверхности. Аналогично тому как при неравномерном давлении появляется объемная сила, равная (на единицу объема) $-\nabla p$ здесь имеем для тангенциальной силы $\mathbf{f}_t$, действующей на единицу площади поверхности раздела, $\mathbf{f}_t=\operatorname{grad}\alpha$. Мы пишем здесь градиент со знаком плюс перед ним, а не со знаком минус, как в силе $-\nabla p$, в связи с тем, что силы поверхностного натяжения стремятся уменьшить площадь поверхности, между тем как силы давления стремятся увеличить объем тела. Прибавляя эту силу к правой стороне равенства (61,13), получим граничное условие

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] n_i = \left(\sigma'^{(1)}_{ik} - \sigma'^{(2)}_{ik}\right) n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \quad (61,14)$$

(единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен внутрь первой жидкости). Отметим, что это условие может быть выполнено только у вязкой жидкости. Действительно, у идеальной жидкости $\sigma'_{ik} = 0$; тогда левая сторона равенства (61,14) будет представлять собой вектор, направленный по нормали, а правая — вектор, направленный по касательной к поверхности. Но такое равенство невозможно (за исключением, разумеется, тривиального случая, когда эти величины равны нулю каждая в отдельности).

Задачи

1. Определить форму жидкой пленки, края которой закреплены на двух рамках, имеющих форму окружностей, центры которых лежат на общей прямой, перпендикулярной к их плоскостям (разрез пленки изображен на рис. 41).

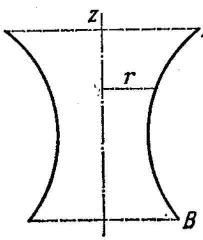

Рис. 41

Решение. Задача сводится к отысканию поверхности минимальной площади, образованной вращением вокруг прямой $r = 0$ кривой $z = z(r)$, имеющей концы в двух заданных точках A и B. Площадь поверхности вращения есть

$$f = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} F(r, r')\, dz, \quad F = r\left(1 + r'^2\right)^{1/2},$$

где $r' \equiv dr/dz$. Первый интеграл уравнения Эйлера задачи о минимуме такого интеграла (с выражением F, не содержащим z) есть

$$F - r'\frac{\partial F}{\partial r'} = \text{const}.$$

В данном случае это дает:

$$r = c_1 (1 + r'^2)^{1/2},$$

откуда находим после интегрирования

$$r = c_1 \operatorname{ch} \frac{z - c_2}{c_1};$$

таким образом, искомая поверхность является поверхностью, образованной вращением цепной линии (так называемый катеноид). Постоянные c_1 и c_2 должны быть определены так, чтобы кривая $r(z)$ проходила через заданные точки A и B. При этом c_2 зависит просто от выбора начала координат на оси z. Для постоянной же c_1 получаются два значения, из которых должно быть выбрано большее (меньшее не соответствует минимуму интеграла).

При увеличении расстояния h между рамками при некотором определенном его значении наступает момент, когда уравнение, определяющее постоянную c_1, перестает иметь вещественные корни. При бо́льших расстояниях устойчивой является только форма, соответствующая двум пленкам, натянутым на каждую из двух рамок. Так, для двух рамок одинакового радиуса R катеноидная форма становится невозможной при расстоянии h между рамками, равном $h = 1{,}33\,R$.

2. Определить форму поверхности жидкости, находящейся в поле тяжести и соприкасающейся с одной стороны с вертикальной плоской стенкой. Краевой угол, образуемый жидкостью при соприкосновении с веществом стенки, равен θ (рис. 42).

Решение. Выбираем оси координат указанным на рис. 42 образом. Плоскость $x = 0$ есть плоскость стенки, а $z = 0$ есть плоскость поверхности жидкости вдали от стенки. Радиусы кривизны поверхности $z = z(x)$:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = -\frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''},$$

так что уравнение (61,6) приобретает вид

$$\frac{2z}{a^2} - \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} = \mathrm{const} \qquad (1)$$

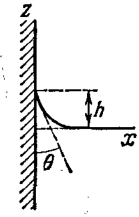

Рис. 42

(a — капиллярная постоянная). При $x = \infty$ должно быть $z = 0$, $1/R_2 = 0$; поэтому const $= 0$. Первый интеграл получающегося уравнения есть

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = A - \frac{z^2}{a^2}. \qquad (2)$$

Из условия на бесконечности ($z = 0$, $z' = 0$ при $x = \infty$) имеем $A = 1$. Второе интегрирование дает

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Arch}\,\frac{a\sqrt{2}}{z} + a\sqrt{2 - \frac{z^2}{a^2}} + x_0.$$

Постоянная x_0 должна быть определена так, чтобы на поверхности стенки ($x = 0$) было $z' = -\mathrm{ctg}\,\theta$ или согласно (2) $z = h$, где $h = a\sqrt{1-\sin\theta}$ есть высота поднятия жидкости у самой стенки.

3. Определить форму поверхности жидкости, поднявшейся между двумя вертикальными параллельными плоскими пластинками (рис. 43).

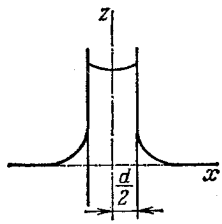

Рис. 43

Решение. Выбираем плоскость y, z посредине между обеими пластинками, а плоскость x, y — совпадающей с поверхностью жидкости вне пространства между пластинками, вдали от них. В уравнении (1) задачи 2, выражающем условие равновесия и потому справедливом вдоль всей поверхности жидкости (как между, так и вне пластинок), условия при $x = \infty$ дают опять const $= 0$. В интеграле же (2) уравнения (1) постоянная A различна для $|x| > d/2$ и $|x| < d/2$ (при $|x| = d/2$ функция $z(x)$ имеет разрыв). Для пространства между пластинками имеем следующие условия: при $x = 0$ должно быть $z' = 0$, а при $x = d/2$ $z' = \mathrm{ctg}\,\theta$, где θ — краевой угол. Согласно (2) имеем для высот $z_0 = z(0)$ и $z_1 = z(d/2)$:

$$z_0 = a\sqrt{A-1}, \quad z_1 = a\sqrt{A - \sin\theta}.$$

Интегрируя (2), получаем:

$$x = \int_{z_0}^{z} \frac{\left(A - \frac{z^2}{a^2}\right) dz}{\sqrt{1 - \left(A - \frac{z^2}{a^2}\right)^2}} = \frac{a}{2} \int_0^{a\sqrt{A - \cos\xi}} \frac{\cos\xi \, d\xi}{\sqrt{A - \cos\xi}},$$

где ξ — новая переменная, связанная с z посредством $z = a\sqrt{A - \cos\xi}$. Этот интеграл — эллиптический и не может быть выражен в элементарных функциях. Постоянная A определяется из условия $z = z_1$ при $x = d/2$, откуда

$$d = a \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \frac{\cos\xi \, d\xi}{\sqrt{A - \cos\xi}}.$$

Полученные формулы определяют форму поверхности жидкости в пространстве между пластинками. При $d \to 0$ A стремится к бесконечности. Поэтому при $d \ll a$ имеем:

$$d \approx \frac{a}{\sqrt{A}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \cos\xi \, d\xi = \frac{a}{\sqrt{A}} \cos\theta,$$

откуда $A = (a/d)^2 \cos^2\theta$. Высота поднятия жидкости

$$z_0 \approx z_1 \approx \frac{a^2}{d} \cos\theta;$$

эта формула может быть получена, разумеется, и элементарным путем.

4. На плоскости горизонтальной твердой поверхности находится (в поле тяжести) тонкий неравномерно нагретый слой жидкости; ее температура является заданной функцией координаты x вдоль слоя, причем (благодаря тонкости пленки) ее можно считать не зависящей от координаты z вдоль толщины слоя. Неравномерная нагретость приводит к возникновению стационарного движения жидкости в пленке, в результате чего ее толщина ζ будет меняться вдоль слоя; требуется определить функцию $\zeta = \zeta(x)$.

Решение. Вместе с температурой заданными функциями x являются также плотность ρ жидкости и поверхностное натяжение α. Давление в жидкости $p = p_0 + \rho g(\zeta - z)$, где p_0 — атмосферное давление (давление на свободной поверхности слоя); изменением давления благодаря искривлению поверхности можно пренебречь. Скорость жидкости в тонком слое можно считать направленной везде вдоль оси x. Уравнение движения гласит:

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = g\left[\frac{d(\rho\zeta)}{dx} - z\frac{d\rho}{dx}\right]. \tag{1}$$

На твердой поверхности ($z = 0$) имеем $v = 0$, а на свободной поверхности ($z = \zeta$) должно выполняться граничное условие (61,14), которое в данном случае дает

$$\eta \left.\frac{dv}{dz}\right|_{z=\zeta} = \frac{d\alpha}{dx}.$$

Интегрируя уравнение (1) с этими условиями, получим:

$$\eta v = gz\left(\zeta - \frac{z}{2}\right)\frac{d(\rho\zeta)}{dx} - \frac{gz}{6}(3\zeta^2 - z^2)\frac{d\rho}{dx} - z\frac{d\alpha}{dx}. \tag{2}$$

Ввиду стационарности движения полный поток жидкости через поперечное сечение слоя должен быть равен нулю: $\int_0^\zeta v\,dz = 0$. Подставляя сюда (2), получим следующее уравнение:

$$\frac{\rho}{3}\frac{d\zeta^2}{dx} + \frac{1}{4}\frac{d\rho}{dx}\zeta^2 = \frac{1}{g}\frac{d\alpha}{dx},$$

определяющее функцию $\zeta(x)$. Интегрируя его, получим:

$$g\zeta^2 = 3\rho^{-3/4}\left[\int \rho^{-1/4}\,d\alpha + \mathrm{const}\right]. \tag{3}$$

Если температура (а с ней и ρ и α) лишь мало меняется вдоль слоя жидкости, то можно написать (3) в виде

$$\zeta^2 = \zeta_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{3/4} + \frac{3}{\rho g}(\alpha - \alpha_0),$$

где ζ_0 — значение ζ в точке, где $\rho = \rho_0$, $\alpha = \alpha_0$.

§ 62. Капиллярные волны

Поверхность жидкости стремится принять свою равновесную форму как под влиянием действующего на жидкость поля тяжести, так и под влиянием сил поверхностного натяжения. Между тем при изучении в § 12 волн на поверхности жидкости мы не учитывали этого последнего фактора. Мы увидим ниже, что влияние капиллярности на гравитационные волны существенно при малых длинах волн.

Как и в § 12, будем предполагать амплитуду колебаний малой по сравнению с длиной волны. Для потенциала скорости имеем по-прежнему уравнение

$$\Delta\varphi = 0.$$

Условие же на поверхности жидкости будет теперь иным: разность давлений с обеих сторон этой поверхности должна быть равной не нулю, как это предполагалось в § 12, а должна определяться формулой Лапласа (61,3)

Обозначим z-координату точек поверхности жидкости посредством ζ. Поскольку ζ мало, то можно воспользоваться выражением (61,11) и написать формулу Лапласа в виде

$$p - p_0 = -\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Здесь p есть давление в жидкости вблизи поверхности, p_0 — постоянное внешнее давление. Для p подставляем согласно (12,2)

$$p = -\rho g\zeta - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и находим:

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0$$