Ввиду стационарности движения полный поток жидкости через поперечное сечение слоя должен быть равен нулю: $\int_0^\zeta v\,dz = 0$. Подставляя сюда (2), получим следующее уравнение:

$$\frac{\rho}{3}\frac{d\zeta^2}{dx} + \frac{1}{4}\frac{d\rho}{dx}\zeta^2 = \frac{1}{g}\frac{d\alpha}{dx},$$

определяющее функцию $\zeta(x)$. Интегрируя его, получим:

$$g\zeta^2 = 3\rho^{-3/4}\left[\int \rho^{-1/4}\,d\alpha + \text{const}\right]. \qquad (3)$$

Если температура (а с ней и ρ и α) лишь мало меняется вдоль слоя жидкости, то можно написать (3) в виде

$$\zeta^2 = \zeta_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{3/4} + \frac{3}{\rho g}(\alpha - \alpha_0),$$

где ζ_0 — значение ζ в точке, где $\rho = \rho_0$, $\alpha = \alpha_0$.

§ 62. Капиллярные волны

Поверхность жидкости стремится принять свою равновесную форму как под влиянием действующего на жидкость поля тяжести, так и под влиянием сил поверхностного натяжения. Между тем при изучении в § 12 волн на поверхности жидкости мы не учитывали этого последнего фактора. Мы увидим ниже, что влияние капиллярности на гравитационные волны существенно при малых длинах волн.

Как и в § 12, будем предполагать амплитуду колебаний малой по сравнению с длиной волны. Для потенциала скорости имеем по-прежнему уравнение

$$\Delta\varphi = 0.$$

Условие же на поверхности жидкости будет теперь иным: разность давлений с обеих сторон этой поверхности должна быть равной не нулю, как это предполагалось в § 12, а должна определяться формулой Лапласа (61,3)

Обозначим z-координату точек поверхности жидкости посредством ζ. Поскольку ζ мало, то можно воспользоваться выражением (61,11) и написать формулу Лапласа в виде

$$p - p_0 = -\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Здесь p есть давление в жидкости вблизи поверхности, p_0 — постоянное внешнее давление. Для p подставляем согласно (12,2)

$$p = -\rho g\zeta - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и находим:

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0$$

(по тем же причинам, как и в § 12, можно, определяя соответствующим образом φ, опустить постоянную p_0). Продифференцировав это соотношение по t и заменив в нем $\partial\zeta/\partial t$ на $\partial\varphi/\partial z$, получим граничное условие для потенциала φ в виде

$$\left\{\rho g \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right\}_{z=0} = 0. \qquad (62,1)$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x. Как и в § 12, получаем решение в виде

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t).$$

Связь между k и ω определяется теперь из предельного условия (62,1) и имеет вид

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \qquad (62,2)$$

(*W. Thomson*, 1871).

Мы видим, что при больших длинах волн, удовлетворяющих условию $k \ll (g\rho/\alpha)^{1/2}$ или

$$k \ll 1/a$$

(a — капиллярная постоянная), влиянием капиллярности можно пренебречь, и волна является чисто гравитационной. В обратном случае коротких волн можно пренебречь влиянием поля тяжести. Тогда

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} k^3. \qquad (62,3)$$

Такие волны называются *капиллярными*; в промежуточном случае говорят о *капиллярно-гравитационных* волнах.

Определим еще собственные колебания сферической капли несжимаемой жидкости совершаемые ею под влиянием капиллярных сил. При колебаниях происходит отклонение формы поверхности капли от сферической. Амплитуду колебаний будем, как обычно, предполагать малой.

Начнем с определения суммы $1/R_1 + 1/R_2$ для поверхности, слабо отклоняющейся от сферической. Поступим для этого аналогично тому, что мы делали при выводе формулы (61,11) Площадь поверхности, описываемой в сферических координатах[1] r, θ, φ функцией $r = r(\theta, \varphi)$, равна, как известно, интегралу

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}\, r\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \qquad (62,4)$$

Шаровая поверхность описывается уравнением $r = \text{const} \equiv R$ (R — радиус шара), а близкая к ней поверхность — уравнением

[1]) Ниже в этом параграфе φ обозначает азимут сферических координат, а потенциал скорости мы будем обозначать посредством ψ.

$r = R + \zeta$ с малым ζ. Подставляя это в (62,4), имеем приближенно

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{(R+\zeta)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Определим изменение δf поверхности при варьировании ζ. Имеем:

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta)\,\delta\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\varphi}\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрируя второй член по частям по углу θ, а третий член — по φ, получаем:

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right\}\delta\zeta \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Если разделить выражение в фигурных скобках на $R(R+2\zeta)$, то выражение, которое будет стоять под знаком интеграла в качестве множителя при

$$\delta\zeta\, df \approx \delta\zeta R(R+2\zeta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

будет согласно формуле (61,2) представлять собой как раз искомую сумму обратных радиусов кривизны, вычисленную с точностью до членов первого порядка по ζ. Таким образом, получим:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right\}. \quad (62,5)$$

Первый член соответствует чисто сферической поверхности, для которой $R_1 = R_2 = R$.

Потенциал скорости ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$ с граничным условием при $r = R$, имеющим вид (аналогично тому, что мы имели для плоской поверхности)

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\left\{\frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right]\right\} + p_0 = 0.$$

Постоянную $2\alpha/R + p_0$ в этом условии снова можно опустить; дифференцируя по времени и подставляя

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = v_r = \frac{\partial\psi}{\partial r},$$

находим окончательно граничное условие для ψ в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\Big|_{r=R} - \frac{\alpha}{R^2}\left\{2\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]\right\}_{r=R} = 0. \quad (62,6)$$

Будем искать решение в виде стоячей волны

$$\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \varphi),$$

где функция f удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$. Как известно, всякое решение уравнения Лапласа может быть представлено в виде линейной комбинации так называемых объемных шаровых функций вида

$$r^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — шаровые функции Лапласа, равные

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.$$

Здесь

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$$

присоединенная функция Лежандра ($P_l(\cos\theta)$ — полином Лежандра l-го порядка). Как известно, l пробегает все целые положительные значения, включая нуль, а m пробегает при заданном l значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$.

Соответственно этому ищем частное решение поставленной задачи в виде

$$\psi = A e^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}. \quad (62,7)$$

Частота ω определяется так, чтобы удовлетворить предельному условию (62,6). Подставляя в это уравнение выражение (62,7) и воспользовавшись тем, что шаровые функции Y_{lm} удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0,$$

находим (сокращая общий множитель ψ):

$$\rho\omega^2 + \frac{l\alpha}{R^3}\{2 - l(l+1)\} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho R^3} l(l-1)(l+2). \quad (62,8)$$

(*Rayleigh*, 1879).

Эта формула определяет частоты собственных капиллярных колебаний сферической капли. Мы видим, что они зависят только от числа l, но не от m. Между тем данному l соответствует $2l+1$ различных функций (62,7). Таким образом, каждая из частот (62,8) соответствует $2l+1$ различным собственным колебаниям. О независимых собственных колебаниях, имеющих одинаковые частоты, говорят как о вырожденных; в данном случае имеет место $2l+1$-кратное вырождение.

Выражение (62,8) обращается в нуль при $l=0$ и при $l=1$. Значение $l=0$ соответствовало бы радиальным колебаниям, т. е. сферически симметричным пульсациям капли; в несжимаемой жидкости такие колебания, очевидно, невозможны. При $l=1$ движение представляло бы собой поступательное перемещение капли как целого. Наименьшая возможная частота колебаний капли соответствует $l=2$ и равна

$$\omega^2_{\min} = \frac{8\alpha}{\rho R^3}. \tag{62,9}$$

Задачи

1. Определить зависимость частоты от волнового вектора для капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости, глубина которой равна h.

Решение. Подставляя в условие (62,1)

$$\varphi = A\cos(kx - \omega t)\operatorname{ch} k(z+h)$$

(см. задачу 1 § 12), получаем:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho}\right)\operatorname{th} kh.$$

При $kh \gg 1$ мы возвращаемся к формуле (62,2), а для длинных волн ($kh \ll 1$) имеем:

$$\omega^2 = ghk^2 + \frac{\alpha h k^4}{\rho}.$$

2. Определить коэффициент затухания капиллярных волн.

Решение. Подставляя (62,3) в (25,5), получим

$$\gamma = \frac{2\eta k^2}{\rho} = \frac{2\eta\omega^{4/3}}{\rho^{1/3}\alpha^{2/3}}.$$

3. Найти условие устойчивости тангенциального разрыва в поле тяжести с учетом поверхностного натяжения; жидкости по обе стороны поверхности разрыва предполагаются различными (*Kelvin*, 1871).

Решение. Пусть U — скорость верхнего слоя жидкости относительно нижнего. Накладываем на основное движение периодическое вдоль горизонтальной оси возмущение и ищем потенциал скорости в виде:

в нижней жидкости

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t)$$

и в верхней

$$\varphi' = A'e^{-kz}\cos(kx - \omega t) + Ux.$$

Для нижней жидкости имеем на поверхности разрыва

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

(ζ — вертикальная координата поверхности раздела), а в верхней

$$v'_z = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Условие равенства давлений в обеих жидкостях на поверхности разрыва имеет вид

$$\rho\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g\zeta - \alpha\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \rho'\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \rho' g\zeta + \frac{\rho'}{2}(v'^2 - U^2)$$

(при раскрытии выражения $v'^2 - U^2$ должны быть сохранены только члены первого порядка по A'). Смещение ζ ищем в виде $\zeta = a\sin(kx - \omega t)$. Подставляя φ, φ', ζ в написанные три условия при $z = 0$, получаем три уравнения, исключая из которых a, A, A', находим:

$$\omega = k\frac{\rho' U}{\rho + \rho'} \pm \left[\frac{kg(\rho - \rho')}{\rho + \rho'} - \frac{k^2\rho\rho' U^2}{(\rho + \rho')^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho + \rho'}\right]^{1/2}.$$

Для того чтобы это выражение было вещественным при всех k, необходимо выполнение условия

$$U^4 \leqslant \frac{4\alpha g(\rho - \rho')(\rho + \rho')^2}{\rho^2\rho'^2}.$$

В противном случае существуют комплексные ω с положительной мнимой частью и движение неустойчиво.

§ 63. Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости

Наличие на поверхности жидкости пленки адсорбированного ею вещества может существенно изменить гидродинамические свойства свободной поверхности жидкости. Дело в том, что при изменении формы поверхности, сопровождающем движение жидкости, происходит растяжение или сжатие пленки, т. е. изменение поверхностной концентрации адсорбированного вещества. Эти изменения приводят к появлению дополнительных сил, которые и должны быть учтены в граничных условиях, имеющих место на свободной поверхности жидкости.

Мы ограничимся здесь рассмотрением адсорбированных пленок веществ, которые можно считать нерастворимыми в самой жидкости. Это значит, что вещество находится только у поверхности и не проникает в глубь жидкости. Если же поверхностно-активное вещество обладает также и некоторой заметной растворимостью, то необходимо было бы принять во внимание процессы диффузии этого вещества между поверхностной пленкой и объемом жидкости, возникающие при изменении концентрации пленки.

При наличии адсорбированного вещества коэффициент поверхностного натяжения α является функцией поверхностной концентрации этого вещества (количество вещества на единице площади поверхности), которую мы обозначим посредством γ. Если γ меняется вдоль поверхности, то вместе с ней функцией координат точки поверхности является также и коэффициент α.