(ζ — вертикальная координата поверхности раздела), а в верхней

$$v'_z = \frac{\partial\varphi'}{\partial z} = U\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Условие равенства давлений в обеих жидкостях на поверхности разрыва имеет вид

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho g\zeta - \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \rho'\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \rho' g\zeta + \frac{\rho'}{2}(v'^2 - U^2)$$

(при раскрытии выражения $v'^2 - U^2$ должны быть сохранены только члены первого порядка по A'). Смещение ζ ищем в виде $\zeta = a\sin(kx - \omega t)$. Подставляя φ, φ', ζ в написанные три условия при $z = 0$, получаем три уравнения, исключая из которых a, A, A', находим:

$$\omega = k\frac{\rho' U}{\rho + \rho'} \pm \left[\frac{kg(\rho - \rho')}{\rho + \rho'} - \frac{k^2\rho\rho' U^2}{(\rho + \rho')^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho + \rho'}\right]^{1/2}.$$

Для того чтобы это выражение было вещественным при всех k, необходимо выполнение условия

$$U^4 \leqslant \frac{4\alpha g(\rho - \rho')(\rho + \rho')^2}{\rho^2\rho'^2}.$$

В противном случае существуют комплексные ω с положительной мнимой частью и движение неустойчиво.

§ 63. Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости

Наличие на поверхности жидкости пленки адсорбированного ею вещества может существенно изменить гидродинамические свойства свободной поверхности жидкости. Дело в том, что при изменении формы поверхности, сопровождающем движение жидкости, происходит растяжение или сжатие пленки, т. е. изменение поверхностной концентрации адсорбированного вещества. Эти изменения приводят к появлению дополнительных сил, которые и должны быть учтены в граничных условиях, имеющих место на свободной поверхности жидкости.

Мы ограничимся здесь рассмотрением адсорбированных пленок веществ, которые можно считать нерастворимыми в самой жидкости. Это значит, что вещество находится только у поверхности и не проникает в глубь жидкости. Если же поверхностно-активное вещество обладает также и некоторой заметной растворимостью, то необходимо было бы принять во внимание процессы диффузии этого вещества между поверхностной пленкой и объемом жидкости, возникающие при изменении концентрации пленки.

При наличии адсорбированного вещества коэффициент поверхностного натяжения α является функцией поверхностной концентрации этого вещества (количество вещества на единице площади поверхности), которую мы обозначим посредством γ. Если γ меняется вдоль поверхности, то вместе с ней функцией координат точки поверхности является также и коэффициент α.

В связи с этим в граничном условии на поверхности жидкости добавляется тангенциальная сила, о которой уже шла речь в конце § 61 (условие (61,14)). В данном случае градиент α выражается через градиент поверхностной концентрации, так что действующая на поверхность тангенциальная сила равна

$$\mathbf{f}_t = \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\nabla\gamma. \tag{63,1}$$

В § 61 уже было указано, что граничное условие (61,14) с учетом этой силы может быть выполнено только у вязкой жидкости. Отсюда следует, что в тех случаях, когда вязкость жидкости мала и несущественна для рассматриваемого явления, нет необходимости также и в учете наличия пленки.

Для определения движения жидкости, покрытой пленкой, надо добавить к уравнениям движения жидкости с граничным условием (61,14) еще одно уравнение соответственно тому, что мы имеем теперь на одну неизвестную величину (поверхностная концентрация γ) больше. Этим дополнительным уравнением является уравнение непрерывности, выражающее собой неизменность общего количества адсорбированного вещества в пленке. Конкретный вид этого уравнения зависит от формы поверхности. Если поверхность плоская, то оно имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\gamma) = 0, \tag{63,2}$$

где все величины берутся на поверхности жидкости (плоскость x, y выбрана в плоскости этой поверхности).

Решение задач о движении жидкости, покрытой адсорбционной пленкой, существенно упрощается в тех случаях, когда пленку можно считать несжимаемой, т. е. можно считать, что площадь каждого элемента поверхности пленки остается при движении постоянной.

Примером того, насколько существенным в гидродинамическом отношении может оказаться наличие адсорбционной пленки, является движение пузырька газа в вязкой жидкости Если на поверхности пузырька никакой пленки нет, то наполняющий его газ тоже приходит в движение, и сила сопротивления, испытываемая пузырьком со стороны жидкости, оказывается отличной от той, которую испытывал бы твердый шарик того же радиуса (см. задачу 2 § 20). Если же пузырек покрыт пленкой адсорбированного вещества, то прежде всего непосредственно из соображений симметрии ясно, что пленка остается при движении пузырька неподвижной. Действительно, движение в ней могло бы совершаться только по поверхности пузырька вдоль меридианов; в результате происходило бы непрерывное накапливание вещества пленки у одного из полюсов пузырька (внутрь газа или жидкости адсорбированное вещество не проникает), что невозможно. Вместе со скоростью пленки должна быть равной нулю и скорость газа на поверхности пузырька, а при таких граничных условиях останется неподвижным вообще весь газ внутри пузырька. Таким образом, покрытый пленкой пузырек будет двигаться как твердый шарик и, в частности, испытываемая им сила сопротивления (при малых числах Рейнольдса) будет определяться формулой Стокса.

Задачи

1. Два сосуда соединены глубоким длинным каналом с плоско-параллельными стенками (ширина канала a, длина l). Поверхность жидкости в сосудах и в канале покрыта адсорбированной пленкой, причем поверхностные концентрации γ_1 и γ_2 пленки в обоих сосудах различны, в результате чего вблизи поверхности жидкости в канале возникает движение. Определить количество переносимого при этом движении вещества пленки.

Решение. Выбираем плоскость одной из стенок канала в качестве плоскости x, z, а поверхность жидкости — в качестве плоскости x, y, так, что ось x направлена вдоль длины канала; области жидкости соответствуют $z < 0$. Градиент давления отсутствует, так что уравнение стационарного движения жидкости (ср. § 17) есть

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

где v есть скорость жидкости, направленная, очевидно, по оси x. Вдоль длины канала имеется градиент концентрации $\frac{d\gamma}{dx}$. На поверхности жидкости в канале имеет место граничное условие

$$\eta\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{d\alpha}{dx} \quad \text{при} \quad z=0. \tag{2}$$

На стенках канала жидкость должна быть неподвижна, т. е.

$$v=0 \quad \text{при} \quad y=0,\ a. \tag{3}$$

Глубину канала считаем бесконечной, и потому

$$v=0 \quad \text{при} \quad z\to-\infty. \tag{4}$$

Частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими условиям (3) и (4), являются

$$\text{const}\,\sin\,(2n+1)\,\frac{\pi y}{a}\cdot\exp\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{a}\,z\right)$$

с целыми n. Условию (2) удовлетворяет сумма

$$v=\frac{4a}{\eta\pi^2}\,\frac{d\alpha}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\,(2n+1)\,\frac{\pi y}{a}\,\exp\,\frac{(2n+1)\,\pi z}{a}}{(2n+1)^2}.$$

Количество переносимого (в единицу времени) вещества пленки равно

$$Q=\int_0^a \gamma v\,|_{z=0}\,dy=\frac{8a^2}{\eta\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\frac{d\alpha}{dx}\,\gamma$$

(движение происходит в направлении увеличения α). Величина Q должна быть, очевидно, постоянной вдоль канала. Поэтому можно написать:

$$\gamma \frac{d\alpha}{dx} = \text{const} = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{d\alpha}{dx}\gamma\, dx = \frac{1}{l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma\, d\alpha,$$

где $\alpha_1 = \alpha(\gamma_1)$, $\alpha_2 = \alpha(\gamma_2)$, и предполагается, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Таким образом, имеем окончательно

$$Q = \frac{8a^2}{\eta l \pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\right)\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma\, d\alpha = 0{,}27\frac{a^2}{\eta l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma\, d\alpha.$$

2. Определить коэффициент затухания капиллярных волн на поверхности жидкости, покрытой адсорбированной пленкой.

Решение. Если вязкость жидкости не слишком велика, то растягивающие (тангенциальные) силы, действующие на пленку со стороны жидкости, малы, и поэтому пленку можно рассматривать как несжимаемую.

Соответственно этому можно вычислять диссипацию энергии как диссипацию вблизи твердой стенки, т. е. по формуле (24,14). Написав потенциал скорости в виде

$$\varphi = \varphi_0 e^{ikx-\omega t} e^{-kz},$$

получим для диссипации, отнесенной к единице площади поверхности:

$$\bar{\dot{E}}_{\text{кин}} = -\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{8}}\,|k\varphi_0|^2.$$

Полная же энергия (тоже отнесенная к единице площади) есть

$$\bar{E} = \rho\int \overline{v^2}\, dz = \frac{\rho}{2k}\,|k\varphi_0|^2.$$

Коэффициент затухания равен (используем соотношение (62,3)):

$$\gamma = \frac{\omega^{7/6}\eta^{1/2}}{2\sqrt{2}\,\alpha^{1/3}\rho^{1/6}} = \frac{k^{7/4}\eta^{1/2}\alpha^{1/4}}{2\sqrt{2}\,\rho^{3/4}}.$$

Отношение этой величины к коэффициенту затухания капиллярных волн на чистой поверхности жидкости (задача 2, § 62) равно

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha\rho}{k\eta^2}\right)^{1/4}$$

и велико по сравнению с единицей, если только длина волны не чрезмерно мала. Таким образом, наличие адсорбированной пленки на поверхности жидкости приводит к значительному увеличению коэффициента затухания волн.