ГЛАВА VIII

ЗВУК

§ 64. Звуковые волны

Переходя к изучению движения сжимаемой жидкости (или газа), мы начнем с исследования малых колебаний в ней; колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости называют *звуковыми волнами.* В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\mathbf{v}$ в ней мала, так что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. По этой же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Мы будем писать переменные p и ρ в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \tag{64,1}$$

где ρ_0, p_0 — постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а ρ', p' — их изменения в звуковой волне ($\rho' \ll \rho_0, p' \ll p_0$).

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

при подстановке в него (64,1) и пренебрежении малыми величинами второго порядка (ρ', p', $\mathbf{v}$ надо при этом считать малыми величинами первого порядка) принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{64,2}$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \tag{64,3}$$

Условие применимости линеаризованных уравнений движения (64,2) и (64,3) для распространения звуковых волн заключается в малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со скоростью звука: $v \ll c$. Это условие можно получить, например, из требования $\rho' \ll \rho_0$ (см. ниже формулу (64,12)).

Уравнения (64,2) и (64,3) содержат неизвестные функции $\mathbf{v}$, p', ρ'. Для исключения одной из них замечаем, что звуковая волна в идеальной жидкости является, как и всякое другое движение в такой жидкости, адиабатическим. Поэтому малое изменение p' давления связано с малым изменением ρ' плотности уравнением

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \rho'. \tag{64,4}$$

Заменив с его помощью ρ' на p' в уравнении (64,2), получим:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{64,5}$$

Два уравнения (64,3) и (64,5) с неизвестными $\mathbf{v}$ и p' полностью описывают звуковую волну.

Для того чтобы выразить все неизвестные величины через одну из них, удобно ввести потенциал скорости согласно $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Из уравнения (64,3) получим равенство

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{64,6}$$

связывающее p' с φ (индекс у p_0 и ρ_0 здесь и ниже мы будем для краткости опускать). После этого найдем из (64,5) уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \tag{64,7}$$

которому должен удовлетворять потенциал φ; здесь введено обозначение

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \tag{64,8}$$

Уравнение вида (64,7) называется *волновым*. Применив к (64,7) операцию grad, найдем, что такому же уравнению удовлетворяет каждая из трех компонент скорости $\mathbf{v}$, а взяв производную по времени от (64,7), найдем, что волновому уравнению удовлетворяет и давление p' (а потому и ρ').

Рассмотрим звуковую волну, в которой все величины зависят только от одной из координат, скажем, от x. Другими словами, все движение однородно в плоскости y, z; такая волна называется плоской. Волновое уравнение (64,7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{64,9}$$

Для решения этого уравнения вводим вместо x, t новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Легко убедиться в том, что в этих переменных уравнение (64,9) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\xi}=0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ, находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=F(\eta),$$

где $F(\eta)$ — произвольная функция. Интегрируя еще раз, получим $\varphi_1=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$\varphi=f_1(x-ct)+f_2(x+ct). \tag{64,10}$$

Функциями такого же вида описывается распределение также и остальных величин (p', ρ', $\mathbf{v}$) в плоской волне.

Будем говорить для определенности о плотности. Пусть, например, $f_2=0$, так что $\rho'=f_1(x-ct)$. Выясним наглядный смысл этого решения. В каждой плоскости $x=\mathrm{const}$ плотность меняется со временем; в каждый данный момент плотность различна для разных x. Очевидно, что плотность одинакова для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $x-ct=\mathrm{const}$, или

$$x=\mathrm{const}+ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t=0$ в некоторой точке жидкости ее плотность имеет определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение плотность имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места (и то же самое относится ко всем остальным величинам в волне). Мы можем сказать, что картина движения распространяется в среде вдоль оси x со скоростью c, называемой скоростью звука.

Таким образом, $f_1(x-ct)$ представляет собой, как говорят, *бегущую плоскую* волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x. Очевидно, что $f_2(x+ct)$ представляет собой волну, распространяющуюся в противоположном, отрицательном, направлении оси x.

Из трех компонент скорости $\mathbf{v}=\mathrm{grad}\,\varphi$ в плоской волне отлична от нуля только компонента $v_x=\partial\varphi/\partial x$. Таким образом, скорость жидкости в звуковой волне направлена вдоль распространения волны. В связи с этим говорят, что звуковые волны в жидкости являются продольными.

В бегущей плоской волне скорость $v_x=v$ связана с давлением p' и плотностью ρ' простыми соотношениями. Написав $\varphi=f(x-ct)$, имеем

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f'(x-ct),\quad p'=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\rho cf'(x-ct).$$

Сравнив эти выражения, находим:

$$v = \frac{p'}{\rho c}. \tag{64,11}$$

Подставляя сюда согласно (64,4) $p' = c^2\rho'$, находим связь между скоростью и изменением плотности:

$$v = \frac{c\rho'}{\rho}. \tag{64,12}$$

Укажем также связь между скоростью и колебаниями температуры в звуковой волне. Имеем $T' = (\partial T/\partial p)_s p'$ и, воспользовавшись известной термодинамической формулой

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

и формулой (64,11), получим:

$$T' = \frac{c\beta T}{c_p} v, \tag{64,13}$$

где $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — температурный коэффициент расширения.

Формула (64,8) определяет скорость звука по адиабатической сжимаемости вещества. Последняя связана с изотермической сжимаемостью известной термодинамической формулой

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{64,14}$$

Вычислим скорость звука в идеальном (в термодинамическом смысле слова) газе. Уравнение состояния идеального газа гласит

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu},$$

где R — газовая постоянная, а μ — молекулярный вес. Для скорости звука получим выражение

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \tag{64,15}$$

где посредством γ обозначено отношение $\gamma = c_p/c_v$. Поскольку γ обычно слабо зависит от температуры, то скорость звука в газе можно считать пропорциональной квадратному корню из температуры [1]. При заданной температуре она не зависит от давления газа [2].

---

[1]) Полезно обратить внимание на то, что скорость звука в газе порядка величины средней тепловой скорости молекул.

[2]) Выражение для скорости звука в газе в виде $c^2 = p/\rho$ было впервые получено *Ньютоном* (1687). Необходимость введения в это выражение множителя γ была показана *Лапласом*.

Весьма важным случаем волн являются *монохроматические* волны, в которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Такие функции обычно бывает удобным писать в виде вещественной части комплексного выражения (см. начало § 24). Так, для потенциала скорости напишем

$$\varphi = \operatorname{Re}\{\varphi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}\}, \tag{64,16}$$

где ω — частота волны. Функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0, \tag{64,17}$$

получающемуся при подстановке (64,16) в (64,7).

Рассмотрим бегущую плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x. В такой волне все величины являются функциями только от $x - ct$, и потому, скажем, потенциал имеет вид

$$\varphi = \operatorname{Re}\left\{Ae^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}, \tag{64,18}$$

где A — постоянная, называемая *комплексной амплитудой*. Написав ее в виде $A = ae^{i\alpha}$ с вещественными постоянными a и α, будем иметь:

$$\varphi = a\cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha\right). \tag{64,19}$$

Постоянную a называют амплитудой, а аргумент под знаком cos — фазой волны. Обозначим посредством $\mathbf{n}$ единичный вектор в направлении распространения волны. Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{64,20}$$

называют *волновым вектором* (а его абсолютную величину часто называют *волновым числом*). С этим обозначением выражение (64,18) записывается в виде

$$\varphi = \operatorname{Re}\{Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\}. \tag{64,21}$$

Монохроматические волны играют весьма существенную роль в связи с тем, что всякую вообще волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами. Такое разложение волны на монохроматические волны является не чем иным, как разложением в ряд или интеграл Фурье (о нем говорят также как о *спектральном разложении*). Об отдельных компонентах этого разложения говорят как о монохроматических компонентах волны или как о ее компонентах Фурье.

Задачи

1. Определить скорость звука в мелкодисперсной двухфазной системе: пар с взвешенными в нем мелкими капельками жидкости («влажный пар») или жидкость с распределенными в ней мелкими пузырьками пара. Длина волны звука предполагается большой по сравнению с размерами неоднородностей системы.

Решение. В двухфазной системе p и T не являются независимыми переменными, а связаны друг с другом уравнением равновесия фаз. Сжатие или разрежение системы сопровождается переходом вещества из одной фазы в другую. Пусть x — доля (по массе) фазы 2 в системе. Имеем:

$$s=(1-x)s_1+xs_2,\qquad V=(1-x)V_1+xV_2, \tag{1}$$

где индексы 1 и 2 отличают величины, относящиеся к чистым фазам *1* и *2*. Для вычисления производной $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ преобразуем ее от переменных p, s к переменным p, x и получаем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x-\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p},$$

после чего подстановка (1) дает

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=x\left[\frac{dV_2}{dp}-\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\frac{ds_2}{dp}\right]+(1-x)\left[\frac{dV_1}{dp}-\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\frac{ds_1}{dp}\right]. \tag{2}$$

Скорость звука определяется с помощью (1) и (2) по формуле (64,8).

Раскрывая полные производные по давлению, вводя скрытую теплоту перехода из фазы *1* в фазу *2*: $q=T(s_2-s_1)$ и воспользовавшись формулой Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT}=\frac{q}{T(V_2-V_1)}$$

для производной вдоль кривой равновесия фаз (см. V § 82), получим выражение, стоящее в первой квадратной скобке в (2) в виде

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p(V_2-V_1)-\frac{Tc_{p2}}{q^2}(V_2-V_1)^2.$$

Аналогично преобразуется и выражение во второй скобке.

Пусть фаза *1* — жидкость, а фаза *2* — пар; последний рассматриваем как идеальный газ, а удельным объемом V_1 можно пренебречь по сравнению с V_2. Если $x\ll 1$ (жидкость с небольшим количеством пара в виде пузырьков), то для скорости звука получается

$$c=\frac{q\mu pV_1}{RT\sqrt{c_{p1}T}} \tag{3}$$

(R — газовая постоянная, μ — молекулярный вес). Эта скорость, вообще говоря, очень мала; таким образом, при образовании в жидкости пузырьков пара (кавитация) скорость звука в ней скачкообразно резко падает.

Если же $1-x\ll 1$ (пар с незначительным количеством жидкости в виде капелек), то получается:

$$\frac{1}{c^2}=\frac{\mu}{RT}-\frac{2}{q}+\frac{c_{p2}T}{q^2}. \tag{4}$$

Сравнивая со скоростью звука в чистом газе (64,15), найдем, что и здесь добавление второй фазы уменьшает скорость звука, хотя и далеко не в такой сильной степени.

В промежутке при возрастании x от нуля до единицы скорость звука монотонно возрастает от значения (3) до значения (4).

Отметим, что при $x = 0$ и $x = 1$ скорость звука испытывает скачок при переходе от однофазной системы к двухфазной. Это обстоятельство приводит к тому, что при очень близких к нулю или единице значениях x обычная линейная теория звука вообще становится неприменимой уже при малых амплитудах звуковой волны: производимые волной сжатия и разрежения в данных условиях сопровождаются переходом двухфазной системы в однофазную (и обратно), в результате чего совершенно нарушается существенное для теории предположение о постоянстве скорости звука.

2. Определить скорость звука в газе, нагретом до настолько высокой температуры, что давление равновесного черного излучения в нем сравнимо с давлением самого газа.

Решение. Давление вещества равно

$$p = nT + \frac{a}{4}T^4,$$

а энтропия

$$s = \frac{1}{m}\ln\frac{T^{3/2}}{n} + \frac{aT^3}{n}.$$

В этих выражениях первые члены относятся к частицам, а вторые — к излучению; n — плотность числа частиц, m — их масса, $a = 4\pi^2/45\hbar^3c^3$ (см. V, § 63)[1]). В плотности же вещества черное излучение не играет роли, так что $\rho = mn$. Скорость звука обозначим здесь в отличие от скорости света посредством u. Записывая производные в виде якобианов, имеем

$$u^2 = \frac{\partial(p, s)}{\partial(\rho, s)} = \frac{\partial(p, s)}{\partial(n, T)} \Big/ \frac{\partial(\rho, s)}{\partial(n, T)}.$$

Вычислив эти якобианы, получим:

$$u^2 = \frac{5T}{3m}\left[1 + \frac{2a^2T^6}{5n(n + 2aT^3)}\right].$$

§ 65. Энергия и импульс звуковых волн

Выведем выражение для энергии звуковой волны. Согласно общей формуле энергия единицы объема жидкости равна $\rho\varepsilon + \rho v^2/2$. Подставим сюда $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$, где буквы со штрихом обозначают отклонения соответствующих величин от их значений в неподвижной жидкости. Член $\rho' v^2/2$ является величиной третьего порядка малости. Поэтому, если ограничиться точностью до членов второго порядка включительно, получим:

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho'\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2}\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

Производные берутся при постоянной энтропии, поскольку звуковая волна адиабатична. В силу термодинамического соотно-

[1]) Как везде в этой книге, температура измеряется в единицах энергии.