Сравнивая со скоростью звука в чистом газе (64,15), найдем, что и здесь добавление второй фазы уменьшает скорость звука, хотя и далеко не в такой сильной степени.

В промежутке при возрастании x от нуля до единицы скорость звука монотонно возрастает от значения (3) до значения (4).

Отметим, что при $x = 0$ и $x = 1$ скорость звука испытывает скачок при переходе от однофазной системы к двухфазной. Это обстоятельство приводит к тому, что при очень близких к нулю или единице значениях x обычная линейная теория звука вообще становится неприменимой уже при малых амплитудах звуковой волны: производимые волной сжатия и разрежения в данных условиях сопровождаются переходом двухфазной системы в однофазную (и обратно), в результате чего совершенно нарушается существенное для теории предположение о постоянстве скорости звука.

2. Определить скорость звука в газе, нагретом до настолько высокой температуры, что давление равновесного черного излучения в нем сравнимо с давлением самого газа.

Решение. Давление вещества равно

$$p = nT + \frac{a}{4}T^4,$$

а энтропия

$$s = \frac{1}{m}\ln\frac{T^{3/2}}{n} + \frac{aT^3}{n}.$$

В этих выражениях первые члены относятся к частицам, а вторые — к излучению; n — плотность числа частиц, m — их масса, $a = 4\pi^2/45\hbar^3c^3$ (см. V, § 63)[1]). В плотности же вещества черное излучение не играет роли, так что $\rho = mn$. Скорость звука обозначим здесь в отличие от скорости света посредством u. Записывая производные в виде якобианов, имеем

$$u^2 = \frac{\partial(p, s)}{\partial(\rho, s)} = \frac{\partial(p, s)}{\partial(n, T)} \Big/ \frac{\partial(\rho, s)}{\partial(n, T)}.$$

Вычислив эти якобианы, получим:

$$u^2 = \frac{5T}{3m}\left[1 + \frac{2a^2T^6}{5n(n + 2aT^3)}\right].$$

§ 65. Энергия и импульс звуковых волн

Выведем выражение для энергии звуковой волны. Согласно общей формуле энергия единицы объема жидкости равна $\rho\varepsilon + \rho v^2/2$. Подставим сюда $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$, где буквы со штрихом обозначают отклонения соответствующих величин от их значений в неподвижной жидкости. Член $\rho' v^2/2$ является величиной третьего порядка малости. Поэтому, если ограничиться точностью до членов второго порядка включительно, получим:

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho'\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2}\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

Производные берутся при постоянной энтропии, поскольку звуковая волна адиабатична. В силу термодинамического соотно-

---

[1]) Как везде в этой книге, температура измеряется в единицах энергии.

шения

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

имеем:

$$\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right)_s = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w,$$

вторая производная:

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s = \frac{c^2}{\rho}.$$

Таким образом, энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho_0\varepsilon_0 + w_0\rho' + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \rho_0\frac{v^2}{2}.$$

Первый член в этом выражении ($\varepsilon_0\rho_0$) представляет собой энергию единицы объема неподвижной жидкости и не имеет отношения к звуковой волне. Что касается второго члена ($w_0\rho'$), то это есть изменение энергии, связанное просто с изменением количества вещества (массы жидкости) в каждой данной единице объема. В полной энергии, получающейся интегрированием энергии единицы объема по всему объему жидкости, этот член выпадает: поскольку общее количество жидкости остается неизменным, то $\int \rho'dV = 0$. Таким образом, полное изменение энергии жидкости, связанное с наличием звуковой волны, равно интегралу

$$\int\left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}\right)dV.$$

Подынтегральное выражение можно рассматривать как плотность E звуковой энергии:

$$E = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}. \qquad (65,1)$$

Это выражение упрощается в случае бегущей плоской волны. В такой волне $\rho' = \rho_0 v/c$, и оба члена в (65,1) оказываются одинаковыми, так что

$$E = \rho_0 v^2. \qquad (65,2)$$

В общем случае произвольной волны такое соотношение не имеет места. Аналогичную формулу можно написать в общем случае лишь для среднего (по времени) значения полной звуковой энергии. Она следует непосредственно из известной общей теоремы механики о том, что во всякой системе, совершающей малые колебания, среднее значение полной потенциальной энергии равно среднему значению полной кинетической энергии.

Поскольку последняя равна в данном случае $\frac{1}{2}\int \rho_0\overline{v^2}\,dV$, то мы находим, что полная средняя звуковая энергия есть

$$\int \overline{E}\,dV = \int \rho_0\overline{v^2}\,dV. \tag{65,3}$$

Далее, рассмотрим некоторый объем жидкости, в которой распространяется звук, и определим поток энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем. Плотность потока энергии в жидкости равна согласно (6,3) $\rho\mathbf{v}(w + v^2/2)$. В рассматриваемом случае можно пренебречь членом с v^2 как малым третьего порядка. Поэтому плотность потока энергии в звуковой волне есть $\rho\mathbf{v}w$. Подставив сюда $w = w_0 + w'$, имеем

$$\rho w\mathbf{v} = w_0\rho\mathbf{v} + \rho w'\mathbf{v}.$$

Для малого изменения тепловой функции имеем

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p' = \frac{p'}{\rho}$$

и далее $\rho w\mathbf{v} = w_0\rho\mathbf{v} + p'\mathbf{v}$. Полный поток энергии через рассматриваемую поверхность равен интегралу

$$\oint (w_0\rho\mathbf{v} + p'\mathbf{v})\,d\mathbf{f}.$$

Первый член в этой формуле есть поток энергии, связанный просто с изменением массы жидкости в данном объеме. Но мы уже опустили соответствующий (равный нулю при интегрировании по бесконечному объему) член $w_0\rho'$ в плотности энергии. Поэтому, чтобы получить поток энергии, плотность которой определена согласно (65,1), надо опустить этот член, и поток энергии будет просто

$$\oint p'\mathbf{v}\,d\mathbf{f}.$$

Мы видим, что роль плотности потока звуковой энергии играет вектор

$$\mathbf{q} = p'\mathbf{v}. \tag{65,4}$$

Легко проверить, что, как и должно было быть, имеет место соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} p'\mathbf{v} = 0, \tag{65,5}$$

выражающее закон сохранения энергии, причем роль плотности потока энергии играет именно вектор (65,4).

В бегущей (слева направо) плоской волне изменение давления связано со скоростью посредством $p' = c\rho_0 v$, где скорость $v \equiv v_x$ понимается вместе со своим знаком. Введя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении распространения волны, получим

$$\mathbf{q} = c\rho_0 v^2 \mathbf{n} = cE\mathbf{n}. \qquad (65,6)$$

Таким образом, в плоской звуковой волне плотность потока энергии равна плотности энергии, умноженной на скорость звука, — результат, который естественно было ожидать.

Рассмотрим теперь звуковую волну, занимающую в каждый данный момент времени некоторую конечную область пространства (нигде не ограниченную твердыми стенками) — *волновой пакет*; определим полный импульс жидкости в такой волне. Импульс единицы объема жидкости совпадает с плотностью потока массы $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Подставив $\rho = \rho_0 + \rho'$, имеем $\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}$. Изменение плотности связано с изменением давления посредством $\rho' = p'/c^2$. С помощью (65,4) получаем поэтому

$$\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \mathbf{q}/c^2. \qquad (65,7)$$

Если в рассматриваемых явлениях вязкость жидкости несущественна, то движение в звуковой волне можно считать потенциальным и написать $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ (подчеркнем, что это утверждение не связано с теми пренебрежениями, которые были сделаны в § 64 при выводе линейных уравнений движения, — решение с $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ является точным решением уравнений Эйлера). Поэтому имеем:

$$\mathbf{j} = \rho_0\nabla\varphi + \mathbf{q}/c^2.$$

Полный импульс волны равен интегралу $\int \mathbf{j}\,dV$ по всему занимаемому ею объему. Но интеграл от $\nabla\varphi$ может быть преобразован в интеграл по поверхности:

$$\int \nabla\varphi\,dV = \oint \varphi\,d\mathbf{f}$$

и обращается в нуль, так как вне занимаемого волновым пакетом объема $\varphi = 0$. Таким образом, полный импульс пакета равен

$$\int \mathbf{j}\,dV = \frac{1}{c^2}\int \mathbf{q}\,dV. \qquad (65,8)$$

Эта величина, вообще говоря, отнюдь не обращается в нуль. Но отличный от нуля полный импульс означает, что имеет место перенос вещества. Мы приходим к результату, что распространение звукового пакета сопровождается переносом вещества жидкости. Это — эффект второго порядка, поскольку $\mathbf{q}$ есть величина второго порядка.

Наконец, рассмотрим звуковое поле в области пространства, неограниченной по своей длине и ограниченной по поперечному сечению (*волновой цуг* конечной апертуры); вычислим среднее значение переменной части давления p' в нем. В первом приближении, соответствующем обычным линейным уравнениям движения, p' является периодической знакопеременной функцией и среднее значение p' обращается в нуль. Этот результат, однако, может не иметь места, если обратиться к более высоким приближениям. Если ограничиться величинами второго порядка малости, то оказывается возможным выразить $\bar{p}'$ через величины, вычисляемые с помощью линейных уравнений звука, так что не приходится прибегать к непосредственному решению нелинейных уравнений движения, получающихся при учете величин высших порядков.

Характерным свойством рассматриваемого звукового поля является то, что разности значений потенциала скорости φ в различных его точках остаются конечными при неограниченном увеличении расстояния между ними (и то же самое относится к разности значений φ в заданной точке пространства в различные моменты времени). Действительно, это изменение дается интегралом

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \mathbf{v}\, d\mathbf{l},$$

который может быть взят по любому пути между точками *1* и *2*; указанное свойство потенциала становится очевидным, если заметить, что в данном случае можно выбрать путь, проходящий вдоль длины цуга вне его[1]).

Имея в виду это свойство, будем исходить из уравнения Бернулли

$$w + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{const}.$$

Усредним это равенство по времени. Среднее значение производной $\partial\varphi/\partial t$ обращается в нуль[2]). Написав также $w = w_0 + w'$ и включив постоянную w_0 в const, находим $\overline{w'} + \overline{v^2}/2 = \text{const}$. Поскольку const одинакова во всем пространстве, а вне волнового цуга вдали от него w' и v обращаются в нуль, то ясно, что эта

[1]) Подобные соображения, по существу, использованы и при выводе (65,8), основанном на утверждении, что $\varphi = 0$ везде вокруг волнового пакета вдали от него.

[2]) По общему определению средних, для среднего значения производной от некоторой функции $f(t)$ имеем

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{df}{dt}\,dt = \frac{1}{T}\,[f(T/2) - f(-T/2)].$$

Если функция $f(t)$ остается конечной при всех t, то при увеличении интервала усреднения T эта величина стремится к нулю.

постоянная должна быть нулем, так что

$$\overline{w'} + \frac{\overline{v^2}}{2} = 0. \tag{65,9}$$

Разложим, далее, w' по степеням p'; с точностью до члена второго порядка имеем:

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_s p'^2,$$

и поскольку $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, то

$$w' = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2c^2\rho_0^2}.$$

Подставив это в (65,9), получим:

$$\overline{p'} = -\frac{\rho_0\overline{v^2}}{2} + \frac{\overline{p'^2}}{2\rho_0 c^2} = -\frac{\rho_0\overline{v^2}}{2} + \frac{c^2\overline{\rho'^2}}{2\rho_0}, \tag{65,10}$$

чем и определяется среднее давление. Стоящее справа выражение является величиной второго порядка малости и для его вычисления надо пользоваться p' и v, получающимися путем решения линейных уравнений движения. Для средней плотности имеем

$$\overline{\rho'} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \overline{p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \overline{p'^2}. \tag{65,11}$$

Ввиду конечности площади поперечного сечения волнового цуга, он не может представлять собой строго плоскую волну. Но если линейные размеры сечения достаточно велики по сравнению с длиной волны звука, волновое поле может быть близко к плоскому с высокой точностью. В бегущей плоской волне $v = c\rho'/\rho_0$, так что $\overline{v^2} = c^2\overline{\rho'^2}/\rho_0^2$ и выражение (65,10) обращается в нуль, т. е. среднее изменение давления является эффектом более высокого порядка, чем второй. Изменение же плотности

$$\overline{\rho'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \overline{p'^2}$$

в нуль не обращается[1]). В этом же приближении имеем для среднего значения тензора плотности импульса в бегущей плоской (в указанном выше смысле) волне:

$$\overline{p'} + \overline{\rho v_i v_k} = \overline{p'} + \rho_0\overline{v_i v_k}.$$

Первый член равен нулю, а во втором вводим единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении распространения волны (совпадающем с точ-

[1]) Отметим, что производная $(\partial^2\rho/\partial p^2)_s$ фактически всегда отрицательна и поэтому в бегущей волне $\overline{\rho'} < 0$.

ностью до знака с направлением $\mathbf{v}$). Воспользовавшись соотношением (65,2), будем иметь для плотности потока импульса:

$$\overline{\Pi}_{ik} = \overline{E} n_i n_k. \tag{65,12}$$

Если волна распространяется вдоль оси x, то отлична от нуля только компонента $\overline{\Pi}_{xx} = \overline{E}$. Таким образом, в рассматриваемом приближении имеется средний поток только x-компоненты импульса, причем он переносится в направлении оси x.

По поводу всего сказанного в последнем абзаце лишний раз подчеркнем, что речь идет о волновом цуге, ограниченном по своему сечению. Для волны, плоской в строгом смысле этого слова, эти результаты были бы несправедливы (в частности $\overline{p'}$ могло бы быть отличным от нуля уже в квадратичном приближении — см. задачу 4 в § 101). Формально это связано с тем, что для строго плоской волны (которую нельзя обойти «сбоку») несправедливо, вообще говоря, утверждение о конечности потенциала φ во всем пространстве (или в течение всего времени). Физическое различие связано с возможностью (в случае ограниченного по сечению волнового цуга) возникновения поперечного движения, приводящего к выравниванию среднего давления.

§ 66. Отражение и преломление звуковых волн

Когда звуковая волна падает на границу раздела между двумя различными средами, она отражается и преломляется. Движение в первой среде является тогда наложением двух волн (падающей и отраженной), а во второй среде имеется одна (преломленная) волна. Связь между всеми тремя волнами определяется граничными условиями на поверхности раздела.

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической продольной волны в случае плоской границы раздела. Плоскость yz выберем в качестве граничной. Легко видеть, что все три волны — падающая, отраженная и преломленная — будут иметь одинаковые частоты ω и одинаковые компоненты k_y, k_z волнового вектора (но не компоненту k_x по направлению, перпендикулярному к плоскости раздела). Действительно, в неограниченной однородной среде монохроматическая волна с постоянными $\mathbf{k}$ и ω является решением уравнений движения. При наличии границы раздела добавляются лишь граничные условия, которые в нашем случае относятся к $x = 0$, т. е. не зависят ни от времени, ни от координат y и z. Поэтому зависимость решения от t и от y, z остается неизменной во всем пространстве и времени, т. е. ω, k_y, k_z остаются теми же, какими они были в падающей волне.

Из этого результата могут быть непосредственно выведены соотношения, определяющие направления распространения от-