ностью до знака с направлением **v**). Воспользовавшись соотношением (65,2), будем иметь для плотности потока импульса:

$$\overline{\Pi}_{ik}=\overline{E}n_in_k. \qquad (65{,}12)$$

Если волна распространяется вдоль оси x, то отлична от нуля только компонента $\overline{\Pi}_{xx}=\overline{E}$. Таким образом, в рассматриваемом приближении имеется средний поток только x-компоненты импульса, причем он переносится в направлении оси x.

По поводу всего сказанного в последнем абзаце лишний раз подчеркнем, что речь идет о волновом цуге, ограниченном по своему сечению. Для волны, плоской в строгом смысле этого слова, эти результаты были бы несправедливы (в частности $\overline{p'}$ могло бы быть отличным от нуля уже в квадратичном приближении — см. задачу 4 в § 101). Формально это связано с тем, что для строго плоской волны (которую нельзя обойти «сбоку») несправедливо, вообще говоря, утверждение о конечности потенциала φ во всем пространстве (или в течение всего времени). Физическое различие связано с возможностью (в случае ограниченного по сечению волнового цуга) возникновения поперечного движения, приводящего к выравниванию среднего давления.

§ 66. Отражение и преломление звуковых волн

Когда звуковая волна падает на границу раздела между двумя различными средами, она отражается и преломляется. Движение в первой среде является тогда наложением двух волн (падающей и отраженной), а во второй среде имеется одна (преломленная) волна. Связь между всеми тремя волнами определяется граничными условиями на поверхности раздела.

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической продольной волны в случае плоской границы раздела. Плоскость yz выберем в качестве граничной. Легко видеть, что все три волны — падающая, отраженная и преломленная — будут иметь одинаковые частоты ω и одинаковые компоненты k_y, k_z волнового вектора (но не компоненту k_x по направлению, перпендикулярному к плоскости раздела). Действительно, в неограниченной однородной среде монохроматическая волна с постоянными **k** и ω является решением уравнений движения. При наличии границы раздела добавляются лишь граничные условия, которые в нашем случае относятся к $x=0$, т. е. не зависят ни от времени, ни от координат y и z. Поэтому зависимость решения от t и от y, z остается неизменной во всем пространстве и времени, т. е. ω, k_y, k_z остаются теми же, какими они были в падающей волне.

Из этого результата могут быть непосредственно выведены соотношения, определяющие направления распространения отраженной и преломленной волн. Пусть xy — плоскость падения волны. Тогда в падающей волне $k_z = 0$; то же самое должно иметь место и для отраженной и преломленной волн. Таким образом, направления распространения падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости.

Пусть θ — угол между направлением волны и осью x. Тогда из равенства величин $k_y = (\omega/c)\sin\theta$ для падающей и отраженной волн следует, что

$$\theta_1 = \theta_1', \tag{66,1}$$

т. е. угол падения θ_1 равен углу отражения θ_1'. Из аналогичного же равенства для падающей и преломленной волн следует соотношение

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{66,2}$$

между углом падения θ_1 и углом преломления θ_2 (c_1 и c_2 — скорости звука в обеих средах).

Для того чтобы получить количественное соотношение между интенсивностями падающей, отраженной и преломленной волн, пишем потенциалы скорости в этих волнах соответственно в виде

$$\varphi_1 = A_1 \exp\left\{i\omega\left(\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right\},$$
$$\varphi_1' = A_1' \exp\left\{i\omega\left(-\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right\},$$
$$\varphi_2 = A_2 \exp\left\{i\omega\left(\frac{x}{c_2}\cos\theta_2 + \frac{y}{c_2}\sin\theta_2 - t\right)\right\}.$$

На поверхности раздела ($x = 0$) должны быть равными давления ($p = -\rho\dot\varphi$) и нормальные скорости ($v_x = \partial\varphi/\partial x$) в обеих средах; эти условия приводят к равенствам

$$\rho_1(A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \qquad \frac{\cos\theta_1}{c_1}(A_1 - A_1') = \frac{\cos\theta_2}{c_2} A_2.$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение средних (по времени) плотностей потока энергии в отраженной и падающей волнах. Поскольку плотность потока энергии в плоской волне равна $c\rho v^2$, то имеем:

$$R = \frac{c_1\rho_1\overline{v_1'^2}}{c_1\rho_1\overline{v_1^2}} = \frac{|A_1'|^2}{|A_1|^2}.$$

Простое вычисление приводит к результату

$$R = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg}\theta_2 - \rho_1 \operatorname{tg}\theta_1}{\rho_2 \operatorname{tg}\theta_2 + \rho_1 \operatorname{tg}\theta_1}\right)^2. \tag{66,3}$$

Углы θ_1 и θ_2 связаны друг с другом соотношением (66,2); выразив θ_2 через θ_1, можно представить коэффициент отражения в виде

$$R=\left[\frac{\rho_2c_2\cos\theta_1-\rho_1\sqrt{c_1^2-c_2^2\sin^2\theta_1}}{\rho_2c_2\cos\theta_1+\rho_1\sqrt{c_1^2-c_2^2\sin^2\theta_1}}\right]^2. \qquad (66,4)$$

Для нормального падения ($\theta_1=0$) эта формула дает просто

$$R=\left(\frac{\rho_2c_2-\rho_1c_1}{\rho_2c_2+\rho_1c_1}\right)^2. \qquad (66,5)$$

При угле падения, определяющемся из

$$\operatorname{tg}^2\theta_1=\frac{\rho_2^2c_2^2-\rho_1^2c_1^2}{\rho_1^2\left(c_1^2-c_2^2\right)}, \qquad (66,6)$$

коэффициент отражения обращается в нуль, т. е. звуковая волна целиком преломляется, не отражаясь вовсе; такой случай возможен, если $c_1>c_2$, но $\rho_2c_2>\rho_1c_1$ (или наоборот).

Задача

Определить давление, оказываемое звуковой волной на границу раздела между двумя жидкостями.

Решение. Сумма полных потоков энергии в отраженной и преломленной волнах должна быть равна падающему потоку энергии. Относя поток энергии к единице площади поверхности раздела, напишем это условие в виде

$$c_1E_1\cos\theta_1=c_1E_1'\cos\theta_1+c_2E_2\cos\theta_2,$$

где E_1, E_1', E_2 — плотности энергии в падающей, отраженной и преломленной волнах. Вводя коэффициент отражения $R=\overline{E}_1'/\overline{E}_1$, имеем отсюда

$$\overline{E}_2=\frac{c_1\cos\theta_1}{c_2\cos\theta_2}(1-R)\,\overline{E}_1.$$

Искомое давление p определяется как x-компонента импульса, теряемого в единицу времени звуковой волной (отнесенная к единице площади границы раздела). С помощью выражения (65,12) для тензора плотности потока импульса в звуковой волне найдем:

$$p=\overline{E}_1\cos^2\theta_1+\overline{E}_1'\cos^2\theta_1-\overline{E}_2\cos^2\theta_2.$$

Подставляя выражение для $\overline{E}_2$, вводя R и используя (66,2), получим:

$$p=\overline{E}_1\sin\theta_1\cos\theta_1\,[(1+R)\operatorname{ctg}\theta_1-(1-R)\operatorname{ctg}\theta_2].$$

Для нормального падения ($\theta_1=0$) найдем с помощью (66,5)

$$p=2\overline{E}_1\left[\frac{\rho_1^2c_1^2+\rho_2^2c_2^2-2\rho_1\rho_2c_1^2}{(\rho_1c_1+\rho_2c_2)^2}\right].$$