§ 67. Геометрическая акустика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и ее амплитуда одинаковы во всем пространстве. Произвольные звуковые волны этим свойством, конечно, не обладают. Однако возможны случаи, когда звуковую волну, не являющуюся плоской, в каждом небольшом участке пространства можно рассматривать как плоскую. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести понятие о *лучах* как о линиях, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением распространения волны, и можно говорить о распространении звука вдоль лучей, отвлекаясь при этом от его волновой природы. Изучение законов распространения звука в таких случаях составляет предмет геометрической акустики. Можно сказать, что геометрическая акустика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \to 0$.

Выведем основное уравнение геометрической акустики — уравнение, определяющее направление лучей. Напишем потенциал скорости волны в виде

$$\varphi = ae^{i\psi}. \tag{67,1}$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая акустика применима, амплитуда a является медленно меняющейся функцией координат и времени, а фаза волны ψ есть «почти линейная» функция (напомним, что в плоской волне $\psi = \mathbf{kr} - \omega t + \alpha$ с постоянными $\mathbf{k}$ и ω). В малых участках пространства и малых интервалах времени фазу ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t} t.$$

Соответственно тому, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую, определяем волновой вектор и частоту волны в каждой точке как

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \mathrm{grad}\,\psi, \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{67,2}$$

Величина ψ называется *эйконалом*.

В звуковой волне имеем $\omega^2/c^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Подставляя сюда (67,2), получим следующее основное уравнение геометрической акустики:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{67,3}$$

Если жидкость неоднородна, то коэффициент c^2 является функцией координат.

Как известно из механики, движение материальных частиц может быть определено с помощью уравнения Гамильтона-Якоби, являющегося, как и уравнение (67,3), уравнением в частных производных первого порядка. Аналогичной ψ величиной является при этом действие S частицы, а производные от действия определяют импульс $\mathbf{p}$ и функцию Гамильтона H (энергию) частицы согласно формулам $\mathbf{p} = \partial S/\partial \mathbf{r}$, $H = -\partial S/\partial t$, аналогично формулам (67,2). Известно, далее, что уравнение Гамильтона-Якоби эквивалентно уравнениям Гамильтона, имеющим вид $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{r}$, $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \partial H/\partial \mathbf{p}$. Вследствие указанной аналогии между механикой материальной частицы и геометрической акустикой мы можем непосредственно написать аналогичные уравнения для лучей:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{67,4}$$

В однородной изотропной среде $\omega = ck$ с постоянным c, так что $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$), т. е. как и должно было быть, лучи распространяются по прямым линиям, сохраняя при этом постоянную частоту ω.

Частота остается, разумеется, постоянной вдоль лучей вообще всегда, когда распространение звука происходит в стационарных условиях, т. е. свойства среды в каждой точке пространства не меняются со временем. Действительно, полная производная от частоты по времени, определяющая ее изменение вдоль распространяющегося луча, равна

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}}.$$

При подстановке (67,4) два последних члена взаимно сокращаются; в стационарном же случае $\partial\omega/\partial t = 0$, а потому и $d\omega/dt = 0$.

При стационарном распространении звука в неподвижной неоднородной среде $\omega = ck$, где c есть заданная функция координат. Уравнения (67,4) дают

$$\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{k}} = -k\nabla c. \tag{67,5}$$

Абсолютная величина вектора $\mathbf{k}$ меняется вдоль луча просто по закону $k = \omega/c$ (с $\omega = \text{const}$). Для определения же изменения направления $\mathbf{n}$ полагаем во втором из уравнений (67,5) $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ и пишем:

$$\frac{\omega}{c}\dot{\mathbf{n}} - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{n}(\nabla c\dot{\mathbf{r}}) = -k\nabla c,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\nabla c + \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla c).$$

Вводя элемент проходимой лучом длины $dl = c\,dt$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\mathbf{n}}{dl} = -\frac{\nabla c}{c} + \frac{\mathbf{n}}{c}(\mathbf{n}\nabla c). \qquad (67,6)$$

Этим уравнением определяется форма лучей; $\mathbf{n}$ есть единичный вектор касательной к лучу[1]).

Если уравнение (67,3) решено и эйконал ψ как функция координат и времени известен, то можно найти также и распределение интенсивности звука в пространстве. В стационарных условиях оно определяется уравнением $\operatorname{div}\mathbf{q} = 0$ ($\mathbf{q}$ — плотность потока звуковой энергии), которое должно выполняться во всем пространстве вне источников звука. Написав $\mathbf{q} = cE\mathbf{n}$, где E — плотность звуковой энергии (см. (65,6)), и имея в виду, что $\mathbf{n}$ есть единичный вектор в направлении $\mathbf{k} = \nabla\psi$, получим следующее уравнение:

$$\operatorname{div}\left(cE\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}\right) = 0, \qquad (67,7)$$

которое и определяет распределение E в пространстве.

Вторая из формул (67,4) определяет скорость распространения волн по известной зависимости частоты от компонент волнового вектора. Это — важная формула, относящаяся не только к звуковым, но и ко всяким волнам вообще (мы уже пользовались, например, этой формулой в § 12 в применении к гравитационным волнам). Приведем здесь еще один вывод этой формулы, полезный для уяснения смысла определяемой ею скорости. Рассмотрим волну (или, как говорят, *волновой пакет*), занимающую некоторую конечную область пространства. Предположим, что волна такова, что в ее спектральное разложение входят монохроматические компоненты с частотами, лежащими в некотором малом интервале; то же самое относится и к компонентам их волновых векторов. Пусть ω есть некоторая средняя частота волны и $\mathbf{k}$ — средний волновой вектор. Тогда

---

[1]) Как известно из дифференциальной геометрии, производная $d\mathbf{n}/dl$ вдоль луча равна $\mathbf{N}/R$, где $\mathbf{N}$ — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны луча. Выражение же в правой стороне уравнения (67,6) есть, с точностью до множителя $1/c$, производная от скорости звука по направлению главной нормали; поэтому можно написать это уравнение в виде

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{c}(\mathbf{N}\,\nabla c).$$

Луч изгибается в сторону уменьшения скорости звука.

в некоторый начальный момент времени волна описывается функцией вида

$$\varphi = e^{i\mathbf{kr}} f(\mathbf{r}). \qquad (67{,}8)$$

Функция $f(\mathbf{r})$ заметно отлична от нуля только в некоторой малой (но большой по сравнению с длиной волны $1/k$) области пространства. Ее разложение в интеграл Фурье содержит согласно сделанным предположениям компоненты вида $e^{i\mathbf{r}\,\Delta\mathbf{k}}$, где $\Delta\mathbf{k}$ — малые величины.

Таким образом, каждая из монохроматических компонент волны пропорциональна в начальный момент времени множителю вида

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \mathrm{const}\, e^{i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\mathbf{r}}. \qquad (67{,}9)$$

Соответствующая ей частота есть $\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})$ (напоминаем, что частота является функцией волнового вектора). Поэтому в момент времени t та же компонента будет иметь вид

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \mathrm{const} \cdot \exp\{i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})t\}.$$

Воспользовавшись малостью $\Delta\mathbf{k}$, напишем:

$$\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}) \approx \omega(\mathbf{k}) + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\Delta\mathbf{k}.$$

Тогда $\varphi_{\mathbf{k}}$ принимает вид

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \mathrm{const}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \exp\left\{i\,\Delta\mathbf{k}\left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}t\right)\right\}. \qquad (67{,}10)$$

Если теперь произвести обратное суммирование всех монохроматических компонент волны со всеми имеющимися в ней $\Delta\mathbf{k}$, то, как видно из сравнения (67,9) и (67,10), мы получим:

$$\varphi = e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} f\left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}t\right), \qquad (67{,}11)$$

где f — та же функция, что и в (67,8). Сравнение с (67,8) показывает, что за время t вся картина распределения амплитуды в волне передвинулась в пространстве на расстояние $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}t$ (экспоненциальный множитель перед f в (67,11) влияет только на фазу волны). Следовательно, скорость ее равна

$$\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \qquad (67{,}12)$$

Эта формула и определяет скорость распространения волны с произвольной зависимостью ω от $\mathbf{k}$. В случае $\omega = ck$ с постоянным c она приводит, конечно, к обычному результату $U = \omega/k = c$. В общем же случае произвольной зависимости $\omega(\mathbf{k})$ скорость распространения волны является функцией ее частоты и ее направление может не совпадать с направлением волнового вектора.

Скорость (67,12) называют также *групповой скоростью* волны, а отношение ω/k — *фазовой скоростью*. Подчеркнем, однако, что фазовая скорость не соответствует реальному физическому распространению чего бы то ни было.

По поводу изложенного вывода отметим, что выражаемое формулой (67,11) передвижение волнового пакета без изменения его формы является приближенным и связано с предположенной малостью интервала $\Delta\mathbf{k}$. Вообще же говоря, при зависящей от ω скорости U волновой пакет по мере своего распространения «размазывается» — занимаемая им в пространстве область расширяется. Можно показать, что это размазывание пропорционально квадрату величины интервала $\Delta\mathbf{k}$ волновых векторов, входящих в разложение волнового пакета.

Задача

Определить изменение с высотой амплитуды звука, распространяющегося в поле тяжести в изотермической атмосфере.

Решение. Вдоль изотермической атмосферы (рассматриваемой как идеальный газ) скорость звука постоянна. Плотность потока энергии, очевидно, падает вдоль луча обратно пропорционально квадрату расстояния r от источника:

$$c\rho\overline{v^2} \backsim \frac{1}{r^2}.$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний скорости в звуковой волне меняется вдоль луча обратно пропорционально $r\sqrt{\rho}$. При этом плотность ρ меняется, согласно барометрической формуле, как

$$\rho \backsim \exp\left(-\mu g z/RT\right)$$

(z — высота, μ — молекулярный вес газа, R — газовая постоянная).

§ 68. Распространение звука в движущейся среде

Соотношение $\omega = ck$ между частотой и волновым вектором имеет место только для монохроматической звуковой волны, распространяющейся в неподвижной среде. Нетрудно получить аналогичное соотношение для волны, распространяющейся в движущейся среде (и наблюдаемой в неподвижной системе координат).

Рассмотрим однородный поток жидкости со скоростью $\mathbf{u}$. Назовем неподвижную систему координат x, y, z системой K и введем также систему K' координат x', y', z', движущуюся относительно системы K со скоростью $\mathbf{u}$. В системе K' жидкость неподвижна, и монохроматическая волна в ней имеет обычный вид:

$$p = \text{const}\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - kct)},$$