и ее направление может не совпадать с направлением волнового вектора.

Скорость (67,12) называют также *групповой скоростью* волны, а отношение ω/k — *фазовой скоростью.* Подчеркнем, однако, что фазовая скорость не соответствует реальному физическому распространению чего бы то ни было.

По поводу изложенного вывода отметим, что выражаемое формулой (67,11) передвижение волнового пакета без изменения его формы является приближенным и связано с предположенной малостью интервала $\Delta\mathbf{k}$. Вообще же говоря, при зависящей от ω скорости U волновой пакет по мере своего распространения «размазывается» — занимаемая им в пространстве область расширяется. Можно показать, что это размазывание пропорционально квадрату величины интервала $\Delta\mathbf{k}$ волновых векторов, входящих в разложение волнового пакета.

Задача

Определить изменение с высотой амплитуды звука, распространяющегося в поле тяжести в изотермической атмосфере.

Решение. Вдоль изотермической атмосферы (рассматриваемой как идеальный газ) скорость звука постоянна. Плотность потока энергии, очевидно, падает вдоль луча обратно пропорционально квадрату расстояния r от источника:

$$c\rho\overline{v^2} \propto \frac{1}{r^2}.$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний скорости в звуковой волне меняется вдоль луча обратно пропорционально $r\sqrt{\rho}$. При этом плотность ρ меняется, согласно барометрической формуле, как

$$\rho \propto \exp\left(-\mu g z/RT\right)$$

(z — высота, μ — молекулярный вес газа, R — газовая постоянная).

§ 68. Распространение звука в движущейся среде

Соотношение $\omega = ck$ между частотой и волновым вектором имеет место только для монохроматической звуковой волны, распространяющейся в неподвижной среде. Нетрудно получить аналогичное соотношение для волны, распространяющейся в движущейся среде (и наблюдаемой в неподвижной системе координат).

Рассмотрим однородный поток жидкости со скоростью $\mathbf{u}$. Назовем неподвижную систему координат x, y, z системой K и введем также систему K' координат x', y', z', движущуюся относительно системы K со скоростью $\mathbf{u}$. В системе K' жидкость неподвижна, и монохроматическая волна в ней имеет обычный вид:

$$p = \text{const}\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - kct)},$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}'$ в системе K' связан с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в системе K равенством $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{u}t$. Поэтому в неподвижной системе координат волна имеет вид

$$\varphi=\mathrm{const}\, e^{i\,[\mathbf{kr}-(kc+\mathbf{kn})t]}.$$

Коэффициент при t в показателе есть частота ω волны. Таким образом, в движущейся среде частота связана с волновым вектором $\mathbf{k}$ соотношением

$$\omega=ck+\mathbf{uk}. \tag{68,1}$$

Скорость распространения волн равна

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}=c\frac{\mathbf{k}}{k}+\mathbf{u}; \tag{68,2}$$

это есть геометрическая сумма скорости c в направлении $\mathbf{k}$ и скорости $\mathbf{u}$ «сноса» звука вместе с движущейся жидкостью.

Определим плотность энергии звуковой волны в движущейся среде. Полная мгновенная плотность энергии дается выражением

$$\frac{1}{2}(\rho+\rho')(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2+\frac{c^2\rho'^2}{2\rho}=\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\rho' u^2}{2}+\rho\mathbf{vu}+\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho'\mathbf{uv}+\frac{c^2\rho'^2}{2\rho}\right)$$

(ср. (65,1); индекс 0 у невозмущенных значений величин опускаем). Первый член здесь — энергия невозмущенного течения. Следующие два члена — первого порядка малости, но при усреднении по времени они дадут величины второго порядка, связанные с энергией возбуждаемого волной среднего течения. Все эти члены следует опустить и, таким образом, интересующая нас плотность энергии звуковой волны как таковой дается заключенными в скобки тремя последними членами. Скорость и изменение давления в плоской волне в движущейся среде связаны соотношением

$$(\omega-\mathbf{ku})\mathbf{v}=\mathbf{k}c^2\rho'/\rho,$$

которое следует из линеаризованного уравнения Эйлера

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Учитывая также (68,1), найдем окончательно, что плотность звуковой энергии в движущейся среде:

$$E=E_0\frac{\omega}{\omega-\mathbf{ku}}, \tag{68,3}$$

где $E_0=c^2\rho'^2/\rho=p'^2/\rho c^2$ — плотность энергии в системе отсчета, движущейся вместе со средой [1]).

---

[1]) Эта формула наглядно истолковывается с квантовой точки зрения: число звуковых квантов (фононов) $N=E/\hbar\omega=E_0/\hbar(\omega-\mathbf{ku})$ не зависит от выбора системы отсчета.

С помощью формулы (68,1) можно рассмотреть *эффект Доплера*, заключающийся в том, что частота звука, воспринимаемого наблюдателем, движущимся относительно источника, не совпадает с частотой колебаний последнего.

Пусть звук, испускаемый неподвижным (относительно среды) источником, воспринимается наблюдателем, движущимся со скоростью $\mathbf{u}$. В покоящейся относительно среды системе K' имеем $k = \omega_0/c$, где ω_0 — частота колебаний источника. В системе же K, движущейся вместе с наблюдателем, среда движется со скоростью $-\mathbf{u}$, и частота звука будет согласно (68,1) $\omega = ck - \mathbf{uk}$. Вводя угол θ между направлением скорости $\mathbf{u}$ и волнового вектора $\mathbf{k}$ и полагая $k = \omega_0/c$, найдем, что воспринимаемая движущимся наблюдателем частота звука равна

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right). \tag{68,4}$$

В некотором смысле обратным случаем является распространение в неподвижной среде звуковой волны, испускаемой движущимся источником. Пусть $\mathbf{u}$ обозначает теперь скорость движения источника. Перейдем от неподвижной системы координат к системе K', движущейся вместе с источником; в системе K' жидкость движется со скоростью $-\mathbf{u}$. В системе K', где источник покоится, частота излучаемой им звуковой волны должна быть равна частоте ω_0 колебаний, совершаемых источником. Изменив в (68,1) знак перед $\mathbf{u}$ и вводя угол θ между направлениями $\mathbf{u}$ и $\mathbf{k}$, будем иметь:

$$\omega_0 = ck\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right).$$

С другой стороны, в исходной неподвижной системе K частота связана с волновым вектором равенством $\omega = ck$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c}\cos\theta}. \tag{68,5}$$

Этой формулой определяется связь между частотой ω_0 колебаний движущегося источника звука и частотой ω звука, слышимого неподвижным наблюдателем.

Если источник удаляется от наблюдателя, то угол θ между его скоростью и направлением приходящей в точку наблюдения волной заключен в пределах $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, так что $\cos\theta < 0$. Из (68,5) следует, таким образом, что если источник движется, удаляясь от наблюдателя, то частота слышимого наблюдателем звука уменьшается (по сравнению с ω_0).

Напротив, для приближающегося к наблюдателю источника $0 \leqslant \theta < \pi/2$, так что $\cos\theta > 0$, и частота $\omega > \omega_0$ растет при увеличении скорости u. При $u\cos\theta > c$ согласно формуле (68,5) ω делается отрицательной, что соответствует тому, что слышимый наблюдателем звук будет в действительности доходить до него в обратном порядке, т. е. звук, излученный источником в более поздние моменты времени, дойдет до наблюдателя раньше, чем звук, излученный в более ранние моменты.

Как было указано в начале § 67, приближение геометрической акустики соответствует случаю достаточно малых длин волн, т. е. больших значений волнового вектора. Для этого, вообще говоря, частота звука должна быть достаточно велика. Однако в акустике движущихся сред последнее условие становится не обязательным, если скорость движения среды превосходит скорость звука. Действительно, в этом случае k может быть большим даже при равной нулю частоте: из (68,1) получаем при $\omega = 0$ уравнение

$$ck = -\mathbf{uk}, \tag{68,6}$$

которое имеет решения, если $u > c$. Таким образом, в среде, движущейся со сверхзвуковыми скоростями, могут существовать стационарные малые возмущения, описывающиеся (при достаточно больших k) геометрической акустикой. Это значит, что такие возмущения будут располагаться вдоль определенных линий — лучей.

Рассмотрим, например, однородный сверхзвуковой поток, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{u}$, направление которой выберем в качестве оси x. Компоненты вектора $\mathbf{k}$, лежащего в плоскости x, y, связаны соотношением

$$\left(u^2 - c^2\right) k_x^2 = c^2 k_y^2, \tag{68,7}$$

получающимся путем возведения в квадрат обеих частей равенства (68,6). Для определения формы лучей воспользуемся уравнениями геометрической акустики (67,4), согласно которым

$$\dot{x} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial\omega}{\partial k_y}.$$

Разделив одно из этих уравнений на другое, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\omega/\partial k_y}{\partial\omega/\partial k_x}.$$

Но это отношение есть согласно правилу дифференцирования неявных функций не что иное, как производная $-\partial k_x/\partial k_y$ (взятая при постоянной, в данном случае равной нулю частоте). Таким образом, уравнение, определяющее форму лучей по заданной зависимости между k_x и k_y, гласит:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial k_x}{\partial k_y}. \tag{68,8}$$

Подставив сюда (68,7), получим:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

При постоянном u это уравнение определяет два прямолинейных луча, пересекающих ось x под углами $\pm\alpha$, где $\sin\alpha = c/u$.

К подробному изучению этих лучей мы возвратимся в газодинамике, в которой они играют большую роль.

Задачи

Решение. Подставляя (68,1) в (67,4), получим уравнения распространяющихся в стационарно движущейся среде с распределением скоростей $\mathbf{u}(x, y, z)$, причем везде $u \ll c$. Предполагается, что скорость $\mathbf{u}$ заметно меняется лишь на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны звука.

Решение. Подставляя (68,1) в (67,4), получим уравнения распространения лучей в виде

$$\dot{\mathbf{k}} = -(\mathbf{k}\nabla)\,\mathbf{u} - [\mathbf{k}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}],$$

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = c\frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}.$$

С помощью этих уравнений вычисляем с точностью до членов первого порядка по $\mathbf{u}$ производную $\frac{d}{dt}(k\mathbf{v})$; при вычислении используем равенство

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{u} \approx \frac{c}{k}(\mathbf{k}\nabla)\,\mathbf{u}.$$

Получаем:

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = -kv\,[\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}],$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{v}$. С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = \mathbf{n}\frac{d}{dt}(kv) + kv\frac{d\mathbf{n}}{dt}.$$

Поскольку $\mathbf{n}$ и $d\mathbf{n}/dt$ взаимно перпендикулярны (из $\mathbf{n}^2 = 1$ следует, что $\mathbf{n}\dot{\mathbf{n}} = 0$), то из сравнения обоих выражений находим $\dot{\mathbf{n}} = [\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{n}]$. Вводя элемент проходимой лучом длины $dl = c\,dt$, пишем окончательно

$$\frac{d\mathbf{n}}{dl} = \frac{1}{c}[\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{n}]. \qquad (1)$$

Этим уравнением определяется форма лучей; $\mathbf{n}$ есть единичный вектор касательной к лучу (отнюдь не совпадающий теперь с направлением $\mathbf{k}$!).

2. Определить форму звуковых лучей в движущейся среде с распределением скоростей $u_x = u(z)$, $u_y = u_z = 0$.

Решение. Раскрывая уравнение (1), находим:

$$\frac{dn_x}{dl} = \frac{n_z}{c}\frac{du}{dz}, \quad \frac{dn_y}{dl} = 0$$

(уравнение для n_z можно не писать, так как $\mathbf{n}^2 = 1$). Второе уравнение дает

$$n_y = \mathrm{const} \equiv n_{y0}.$$

В первом же пишем $n_z = dz/dl$, после чего интегрирование дает

$$n_x = n_{x0} + \frac{u(z)}{c}.$$

Эти формулы решают поставленную задачу.

Предположим, что скорость u равна нулю при $z = 0$ и возрастает по направлению вверх ($du/dz > 0$). Если звук распространяется «против ветра» ($n_x < 0$), то его траектория искривляется, загибаясь вверх. При распространении же «по ветру» ($n_x > 0$) луч искривляется, загибаясь вниз; в этом случае луч, вышедший из точки $z = 0$ под малым углом наклона к оси x (n_{x0} близко к единице), поднимается лишь на конечную высоту $z = z_{max}$, которую можно вычислить следующим образом. На высоте z_{max} луч горизонтален, т. е. $n_z = 0$. Поэтому имеем здесь:

$$n_x^2 + n_y^2 \approx n_{x0}^2 + n_{y0}^2 + 2n_{x0}\frac{u}{c} = 1,$$

так что

$$2n_{x0}\frac{u(z_{max})}{c} = n_{z0}^2,$$

откуда по заданной функции $u(z)$ и начальному направлению луча $\mathbf{n}_0$ можно определить z_{max}.

3. Получить выражение принципа Ферма для звуковых лучей в стационарно движущейся среде.

Решение. Принцип Ферма требует минимальности интеграла $\int \mathbf{k}\,d\mathbf{l}$, взятого вдоль луча между двумя заданными точками, причем $\mathbf{k}$ предполагается выраженным как функция от частоты ω и направления луча $\mathbf{n}$ (см. II § 53). Эту функцию можно найти, исключая v и k из соотношений $\omega = ck + \mathbf{u}\mathbf{k}$ и $v\mathbf{n} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}$. В результате принцип Ферма приобретает вид

$$\delta \int \frac{1}{c^2 - u^2}\left(\sqrt{(c^2 - u^2)\,dl^2 + (\mathbf{u}\,d\mathbf{l})^2} - \mathbf{u}\,d\mathbf{l}\right) = 0.$$

В неподвижной среде этот интеграл сводится к обычному $\int \frac{dl}{c}$.

§ 69. Собственные колебания

До сих пор мы рассматривали колебательное движение в неограниченных средах. Мы видели, в частности, что в таких средах могут распространяться волны с произвольными частотами.

Положение существенно меняется для жидкости, находящейся в сосуде конечных размеров. Самые уравнения движения (волновые уравнения) остаются при этом, конечно, теми же, но к ним необходимо добавить теперь граничные условия, которые должны выполняться на поверхности твердых стенок (или на свободной поверхности жидкости). Мы будем рассматривать здесь только *свободные колебания*, происходящие при отсутствии переменных внешних сил (колебания, совершаемые под действием внешних сил, называют вынужденными).

Уравнения движения для ограниченной жидкости отнюдь не при всякой частоте имеют решение, удовлетворяющее соответ-