В первом же пишем $n_z = dz/dl$, после чего интегрирование дает

$$n_x = n_{x0} + \frac{u(z)}{c}.$$

Эти формулы решают поставленную задачу.

Предположим, что скорость u равна нулю при $z=0$ и возрастает по направлению вверх ($du/dz > 0$). Если звук распространяется «против ветра» ($n_x < 0$), то его траектория искривляется, загибаясь вверх. При распространении же «по ветру» ($n_x > 0$) луч искривляется, загибаясь вниз; в этом случае луч, вышедший из точки $z=0$ под малым углом наклона к оси x (n_{x0} близко к единице), поднимается лишь на конечную высоту $z = z_{max}$, которую можно вычислить следующим образом. На высоте z_{max} луч горизонтален, т. е. $n_z = 0$. Поэтому имеем здесь:

$$n_x^2 + n_y^2 \approx n_{x0}^2 + n_{y0}^2 + 2n_{x0}\frac{u}{c} = 1,$$

так что

$$2n_{x0}\frac{u(z_{\max})}{c} = n_{z0}^2,$$

откуда по заданной функции $u(z)$ и начальному направлению луча $\mathbf{n}_0$ можно определить z_{max}.

3. Получить выражение принципа Ферма для звуковых лучей в стационарно движущейся среде.

Решение. Принцип Ферма требует минимальности интеграла $\int \mathbf{k}\,d\mathbf{l}$, взятого вдоль луча между двумя заданными точками, причем $\mathbf{k}$ предполагается выраженным как функция от частоты ω и направления луча $\mathbf{n}$ (см. II § 53). Эту функцию можно найти, исключая v и k из соотношений $\omega = ck + \mathbf{uk}$ и $v\mathbf{n} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}$. В результате принцип Ферма приобретает вид

$$\delta \int \frac{1}{c^2 - u^2}\left(\sqrt{(c^2-u^2)\,dl^2 + (\mathbf{u}\,d\mathbf{l})^2} - \mathbf{u}\,d\mathbf{l}\right) = 0.$$

В неподвижной среде этот интеграл сводится к обычному $\int \frac{dl}{c}$.

§ 69. Собственные колебания

До сих пор мы рассматривали колебательное движение в неограниченных средах. Мы видели, в частности, что в таких средах могут распространяться волны с произвольными частотами.

Положение существенно меняется для жидкости, находящейся в сосуде конечных размеров. Самые уравнения движения (волновые уравнения) остаются при этом, конечно, теми же, но к ним необходимо добавить теперь граничные условия, которые должны выполняться на поверхности твердых стенок (или на свободной поверхности жидкости). Мы будем рассматривать здесь только *свободные колебания*, происходящие при отсутствии переменных внешних сил (колебания, совершаемые под действием внешних сил, называют вынужденными).

Уравнения движения для ограниченной жидкости отнюдь не при всякой частоте имеют решение, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям. Такие решения существуют лишь для ряда вполне определенных значений ω. Другими словами, в среде конечного объема могут происходить свободные колебания лишь с вполне определенными частотами. Их называют частотами *собственных колебаний*, или *собственными частотами* жидкости в данном сосуде.

Конкретные значения собственных частот зависят от формы и размеров сосуда. В каждом данном случае существует бесконечный ряд возрастающих собственных частот. Нахождение их требует конкретного исследования уравнения движения с соответствующими граничными условиями.

Что касается первой, т. е. наименьшей, из собственных частот, то ее порядок величины очевиден непосредственно из соображений размерности. Единственным, входящим в задачу параметром с размерностью длины являются линейные размеры l тела. Ясно поэтому, что соответствующая первой собственной частоте длина волны λ_1 должна быть порядка величины l; порядок величины самой частоты ω_1 получается делением скорости звука на λ_1. Таким образом,

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim c/l. \tag{69,1}$$

Выясним характер движения при собственных колебаниях. Если искать периодическое по времени решение волнового уравнения, скажем, для потенциала скорости, в виде $\varphi = \varphi_0(x, y, z) e^{-i\omega t}$, то для φ_0 будем иметь уравнение

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0. \tag{69,2}$$

В неограниченной среде, когда не надо учитывать никаких граничных условий, это уравнение обладает как вещественными, так и комплексными решениями. В частности, оно имеет решение, пропорциональное $e^{i\mathbf{kr}}$, приводящее к потенциалу вида $\varphi = \text{const}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$. Такое решение представляет собой волну, распространяющуюся с определенной скоростью, или, как говорят, бегущую волну.

Но для среды конечного объема комплексные решения, вообще говоря, не могут существовать. В этом можно убедиться путем следующего рассуждения. Уравнение, которому удовлетворяет φ_0, вещественно, и то же самое относится к граничным условиям. Поэтому, если $\varphi_0(x, y, z)$ есть решение уравнений движения, то и комплексно сопряженное φ_0^* тоже есть решение. Поскольку, с другой стороны, решение уравнений при заданных граничных условиях, вообще говоря, однозначно[1]) (с точностью до постоянного множителя), то должно быть $\varphi_0^* = \text{const}\,\varphi_0$, где

[1]) Это может не иметь места в случае формы сосуда, обладающей высокой симметрией, например, в случае шара.

const — некоторая комплексная постоянная, модуль которой равен единице. Таким образом, φ_0 должно иметь вид

$$\varphi_0 = f(x, y, z)\, e^{-i\alpha}$$

с вещественной функцией f и вещественной постоянной α. Потенциал φ имеет, следовательно, вид (берем вещественную часть от $\varphi_0 e^{-i\omega t}$):

$$\varphi = f(x, y, z)\cos(\omega t + \alpha), \tag{69,3}$$

т. е. является произведением некоторой функции координат на простую периодическую функцию времени.

Такое решение имеет характер, совершенно отличный от бегущей волны. В бегущей волне фазы $\mathbf{kr} - \omega t + \alpha$ колебаний в различных точках пространства в один и тот же момент времени различны, будучи равными только в точках, удаленных друг от друга на расстояние, равное длине волны. В волне же (69,3) в каждый момент времени все точки тела колеблются в одной и той же фазе $(\omega t + \alpha)$. Ни о каком распространении такой волны, очевидно, нельзя говорить. Такие волны называют *стоячими*. Таким образом, собственные колебания представляют собой стоячие волны.

Рассмотрим плоскую стоячую звуковую волну, в которой все величины являются функцией только от одной координаты, скажем, x (и от времени). Написав общее решение уравнения

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0$$

в виде $\varphi_0 = a\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right)$, будем иметь:

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha)\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right).$$

Надлежащим выбором начала координат и начала отсчета времени можно обратить α и β в нуль, так что будет

$$\varphi = a\cos\omega t\cos\frac{\omega}{c}x. \tag{69,4}$$

Для скорости и давления в волне имеем:

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -a\frac{\omega}{c}\cos\omega t\sin\frac{\omega}{c}x;$$

$$p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho\omega\sin\omega t\cos\frac{\omega}{c}x.$$

В точках $x = 0$, $\pi c/\omega$, $2\pi c/\omega$, ..., удаленных друг от друга на расстояние $\pi c/\omega = \lambda/2$, скорость v всегда равна нулю; эти точки называют *узлами* скорости. Посредине между ними (при $x = \pi c/2\omega$, $3\pi c/2\omega$, ...) расположены точки, в которых амплитуда колебаний скорости со временем максимальна; эти точки называют *пучностями* волны. Что же касается давления p', то для него первые точки являются пучностями, а вторые — узлами. Таким образом, в стоячей плоской звуковой волне пучности давления совпадают с узлами скорости, и обратно.

Интересным случаем собственных колебаний являются колебания газа, находящегося в сосуде, в котором имеется маленькое отверстие (такой сосуд называют резонатором). В замкнутом сосуде наименьшая из собственных частот, как мы знаем, — порядка величины c/l, где l — линейные размеры сосуда. При наличии же маленького отверстия появляется новый вид собственных колебаний со значительно меньшей частотой. Эти колебания связаны с тем, что если между газом внутри и вне сосуда появляется разность давлений, то эта разность может выравниваться посредством входа и выхода газа из сосуда наружу. Таким образом, появляются колебания, сопровождающиеся обменом газа между резонатором и внешней средой. Поскольку отверстие мало, то этот обмен происходит медленно; поэтому период колебаний велик, а частота соответственно мала (см. задачу 2). Что касается обычных колебаний, имеющихся в замкнутом сосуде, то их частоты под влиянием наличия малого отверстия практически не меняются.

Задачи

1. Определить собственные частоты звуковых колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.

Решение. Ищем решение уравнения (69,2) в виде

$$\varphi_0 = \text{const}\cos qx \cos ry \cos sz,$$

причем $q^2 + r^2 + s^2 = \omega^2/c^2$. На стенках сосуда имеем условия:

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ a,$$

и аналогично при $y = 0$, b и $z = 0$, c, где a, b, c — длины сторон параллелепипеда. Отсюда находим $q = m\pi/a$, $r = n\pi/b$, $s = p\pi/c$, где m, n, p — произвольные целые числа. Таким образом, собственные частоты равны

$$\omega^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right).$$

2. К отверстию резонатора присоединена тонкая трубочка (сечения S, длины l); определить собственную частоту колебаний.

Решение. Поскольку трубочка является тонкой, то при колебаниях, сопровождающихся входом и выходом газа из резонатора, можно считать, что заметной скоростью обладает только газ в трубочке, а скорость газа внутри сосуда практически равна нулю. Масса газа в трубочке есть $S\rho l$, а сила, действующая на него, есть $S(p_0 - p)$ (p, p_0 — давления газа соответственно внутри резонатора и во внешней среде); поэтому должно быть $S\rho l\dot{v} = S(p - p_0)$ (v — скорость газа в трубочке). С другой стороны, для производной от давления по времени имеем $\dot{p} = c^2\dot{\rho}$, а уменьшение $-\dot{\rho}$ плотности газа в резонаторе в единицу времени можно считать равным вытекающему в единицу времени количеству газа $S\rho v$, деленному на объем V резонатора. Таким образом, имеем $\dot{\rho} = -\frac{c^2 S\rho}{V} v$, откуда

$$\ddot{p} = -\frac{c^2 S\rho}{V}\dot{v} = -\frac{c^2 S}{lV}(p - p_0).$$

Это уравнение дает $p - p_0 = \mathrm{const}\cos\omega_0 t$, где собственная частота ω_0 равна

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

Эта частота мала по сравнению с c/L (L — линейные размеры сосуда), а длина волны соответственно велика по сравнению с L.

При решении мы подразумевали, что линейная амплитуда колебаний газа в трубочке мала по сравнению с ее длиной l. В противном случае колебания сопровождаются выходом из трубочки наружу заметной доли находящегося в ней газа, и становится неприменимым использованное выше линейное уравнение движения газа в трубочке.

§ 70. Сферические волны

Рассмотрим звуковую волну, в которой распределение плотности, скорости и т. д. зависит только от расстояния до некоторого центра, т. е. обладает сферической симметрией. Такая волна называется сферической.

Определим общее решение волнового уравнения, описывающее сферическую волну. Будем писать волновое уравнение, например, для потенциала скорости:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Поскольку φ есть функция только от расстояния r до центра (и от времени t), то, воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, имеем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right). \qquad (70,1)$$

Положив $\varphi = f(r, t)/r$, получим для функции $f(r, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

т. е. обычное волновое уравнение в одном измерении, в котором роль координаты играет радиус r. Решение этого уравнения есть, как мы знаем,

$$f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r),$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом, общее решение уравнения (70,1) имеет вид

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}. \qquad (70,2)$$