времени количеству газа $S\rho v$, деленному на объем V резонатора. Таким образом, имеем $\dot{p} = -\frac{c^2 S\rho}{V} v$, откуда

$$\ddot{p} = -\frac{c^2 S\rho}{V}\dot{v} = -\frac{c^2 S}{lV}(p - p_0).$$

Это уравнение дает $p - p_0 = \text{const}\cos\omega_0 t$, где собственная частота ω_0 равна

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

Эта частота мала по сравнению с c/L (L — линейные размеры сосуда), а длина волны соответственно велика по сравнению с L.

При решении мы подразумевали, что линейная амплитуда колебаний газа в трубочке мала по сравнению с ее длиной l. В противном случае колебания сопровождаются выходом из трубочки наружу заметной доли находящегося в ней газа, и становится неприменимым использованное выше линейное уравнение движения газа в трубочке.

§ 70. Сферические волны

Рассмотрим звуковую волну, в которой распределение плотности, скорости и т. д. зависит только от расстояния до некоторого центра, т. е. обладает сферической симметрией. Такая волна называется сферической.

Определим общее решение волнового уравнения, описывающее сферическую волну. Будем писать волновое уравнение, например, для потенциала скорости:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Поскольку φ есть функция только от расстояния r до центра (и от времени t), то, воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, имеем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right). \tag{70,1}$$

Положив $\varphi = f(r, t)/r$, получим для функции $f(r, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

т. е. обычное волновое уравнение в одном измерении, в котором роль координаты играет радиус r. Решение этого уравнения есть, как мы знаем,

$$f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r),$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом, общее решение уравнения (70,1) имеет вид

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}. \tag{70,2}$$

Первый член представляет собой расходящуюся волну, распространяющуюся во все стороны из начала координат. Второй же член есть волна, сходящаяся к центру. В отличие от плоской волны, амплитуда которой остается постоянной, в сферической волне амплитуда падает обратно пропорционально расстоянию до центра. Интенсивность же волны, определяющаяся квадратом амплитуды, обратно пропорциональна квадрату расстояния, как и должно было быть, поскольку полный поток энергии в волне распределяется по поверхности, площадь которой растет пропорционально r^2.

Переменные части давления и плотности связаны с потенциалом посредством

$$p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \rho' = -\frac{\rho}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

и их распределение определяется формулами того же вида, что и (70,2). Распределение же скорости (радиальной), определяющейся градиентом потенциала, имеет вид

$$v = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{f_1(ct-r)+f_2(ct+r)}{r}\right\}. \tag{70,3}$$

Если в начале координат нет источника звука, то потенциал (70,2) должен оставаться при $r=0$ конечным. Для этого необходимо, чтобы было $f_1(ct) = -f_2(ct)$, т. е.

$$\varphi = \frac{f(ct-r)-f(ct+r)}{r} \tag{70,4}$$

(стоячая сферическая волна). Если же в начале координат находится источник, то потенциал излучаемой им расходящейся волны есть $\varphi = f(ct-r)/r$ и не должен оставаться конечным при $r=0$, поскольку это решение вообще относится только к области вне тела.

Монохроматическая стоячая сферическая волна имеет вид

$$\varphi = Ae^{-i\omega t}\frac{\sin kr}{r}, \tag{70,5}$$

где $k=\omega/c$. Расходящаяся же монохроматическая сферическая волна дается выражением

$$\varphi = A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}. \tag{70,6}$$

Полезно заметить, что это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi Ae^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r}), \tag{70,7}$$

в правой части которого стоит δ-функция координат: $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Действительно, везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{r})=0$, и мы возвращаемся к однородному уравнению (70,1).

Интегрируя же по объему малой сферы вокруг начала координат $\left(\text{в этой области выражение (70,6) сводится к } \frac{A}{r}e^{-i\omega t}\right)$, получим с обеих сторон $-4\pi Ae^{-i\omega t}$.

Рассмотрим сферическую расходящуюся волну, занимающую в пространстве область в виде шарового слоя, позади которого движение либо отсутствует вовсе, либо быстро затухает; такая волна может возникнуть от источника, действовавшего в течение конечного интервала времени, или от некоторой начальной области звукового возмущения (ср. конец § 72 и задачу 4 § 74). Перед приходом волны в некоторую заданную точку пространства потенциал в ней $\varphi \equiv 0$. После же ее прохождения движение снова должно затухнуть; это значит, что во всяком случае должно стать $\varphi = \text{const}$. Но в сферической расходящейся волне потенциал есть функция вида $\varphi = f(ct - r)/r$; такая функция может обратиться в постоянную, только если функция f обращается в нуль. Таким образом, потенциал должен обращаться в нуль как до, так и после прохождения волны[1]). Из этого обстоятельства можно вывести важное следствие, касающееся распределения сгущений и разрежений в сферической волне.

Изменение давления в волне связано с потенциалом посредством $p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Ввиду сказанного выше ясно, что если проинтегрировать p' по всему времени при заданном r, то мы получим в результате нуль:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p'\,dt = 0. \tag{70,8}$$

Это значит, что по мере прохождения сферической волны через заданную точку пространства в этой точке будут наблюдаться как сгущения ($p' > 0$), так и разрежения ($p' < 0$). В этом отношении сферическая волна существенным образом отличается от плоской, которая может состоять и из одних только сгущений или разрежений.

Такая же картина будет наблюдаться также и при рассмотрении хода изменения p' с расстоянием в заданный момент времени; вместо интеграла (70,8) будет при этом равен нулю интеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} rp'\,dr = 0. \tag{70,9}$$

[1]) В противоположность плоской волне, после прохождения которой может быть $\varphi = \text{const} \neq 0$.

Задачи

1. В начальный момент времени газ внутри сферического объема (радиуса a) сжат так, что $\rho' = \text{const} \equiv \Delta$; вне этого объема $\rho' = 0$. Начальная скорость равна нулю во всем пространстве. Определить последующее движение газа.

Решение. Начальные условия для потенциала $\varphi(r, t)$ гласят:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \dot{\varphi}(r, 0) = F(r),$$

где

$$F(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > a, \quad F(r) = -\Delta c^2/\rho \quad \text{при} \quad r < a.$$

Ищем φ в виде (70,4) и из начальных условий находим:

$$f(-r) - f(r) = 0, \quad f'(-r) - f'(r) = \frac{r}{c} F(r).$$

Отсюда

$$f'(r) = -f'(-r) = -\frac{r}{2c} F(r).$$

Наконец, подставив значение $F(r)$, получаем для производной $f'(\xi)$ и для самой функции $f(\xi)$ следующий результат:

$$\text{при } |\xi| > a: \quad f'(\xi) = 0, \qquad f(\xi) = 0;$$
$$\text{при } |\xi| < a: \quad f'(\xi) = \frac{c\Delta}{2\rho}\xi, \quad f(\xi) = \frac{c\Delta}{4\rho}(\xi^2 - a^2),$$

чем и определяется решение задачи. Рассмотрим точку с $r > a$, т. е. вне области начального сжатия; для плотности ρ' имеем здесь:

$$\text{при } t < (r-a)/c \qquad \rho' = 0;$$
$$\text{при } (r-a)/c < t < (r+a)/c \qquad \rho' = \frac{\Delta}{2}\,\frac{r-ct}{r};$$
$$\text{при } t > (r+a)/c \qquad \rho' = 0.$$

Волна проходит через данную точку в течение промежутка времени, равного $2a/c$; другими словами, волна имеет форму шарового слоя толщины $2a$, заключенного в момент t между сферами радиусов $ct - a$ и $ct + a$. Внутри этого слоя плотность меняется по линейному закону, причем в наружной его части ($r > ct$) газ сжат ($\rho' > 0$), а во внутренней ($r < ct$) — разрежен ($\rho' < 0$).

2. Определить собственные частоты центрально-симметрических звуковых колебаний в сферическом сосуде.

Решение. Из граничного условия $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ при $r = a$ (a — радиус сосуда, φ — из (70,5)) получим уравнение

$$\operatorname{tg} ka = ka,$$

определяющее собственные частоты. Первая (наименьшая) частота равна $\omega_1 = 4{,}49\ c/a$.

§ 71. Цилиндрические волны

Рассмотрим теперь волну, в которой распределение всех величин однородно вдоль некоторого одного направления (которое мы выберем в качестве оси z) и обладает полной аксиальной симметрией вокруг этой оси. В такой, как говорят, цилинд-