Задачи

1. В начальный момент времени газ внутри сферического объема (радиуса a) сжат так, что $\rho' = \text{const} \equiv \Delta$; вне этого объема $\rho' = 0$. Начальная скорость равна нулю во всем пространстве. Определить последующее движение газа.

Решение. Начальные условия для потенциала $\varphi(r, t)$ гласят:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \dot{\varphi}(r, 0) = F(r),$$

где

$$F(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > a, \quad F(r) = -\Delta c^2/\rho \quad \text{при} \quad r < a.$$

Ищем φ в виде (70,4) и из начальных условий находим:

$$f(-r) - f(r) = 0, \quad f'(-r) - f'(r) = \frac{r}{c} F(r).$$

Отсюда

$$f'(r) = -f'(-r) = -\frac{r}{2c} F(r).$$

Наконец, подставив значение $F(r)$, получаем для производной $f'(\xi)$ и для самой функции $f(\xi)$ следующий результат:

$$\text{при } |\xi| > a: \quad f'(\xi) = 0, \qquad f(\xi) = 0;$$

$$\text{при } |\xi| < a: \quad f'(\xi) = \frac{c\Delta}{2\rho}\xi, \qquad f(\xi) = \frac{c\Delta}{4\rho}(\xi^2 - a^2),$$

чем и определяется решение задачи. Рассмотрим точку с $r > a$, т. е. вне области начального сжатия; для плотности ρ' имеем здесь:

$$\text{при } t < (r-a)/c \qquad \rho' = 0;$$

$$\text{при } (r-a)/c < t < (r+a)/c \qquad \rho' = \frac{\Delta}{2}\frac{r-ct}{r};$$

$$\text{при } t > (r+a)/c \qquad \rho' = 0.$$

Волна проходит через данную точку в течение промежутка времени, равного $2a/c$; другими словами, волна имеет форму шарового слоя толщины $2a$, заключенного в момент t между сферами радиусов $ct - a$ и $ct + a$. Внутри этого слоя плотность меняется по линейному закону, причем в наружной его части ($r > ct$) газ сжат ($\rho' > 0$), а во внутренней ($r < ct$) — разрежен ($\rho' < 0$).

2. Определить собственные частоты центрально-симметрических звуковых колебаний в сферическом сосуде.

Решение. Из граничного условия $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ при $r = a$ (a — радиус сосуда, φ — из (70,5)) получим уравнение

$$\operatorname{tg} ka = ka,$$

определяющее собственные частоты. Первая (наименьшая) частота равна $\omega_1 = 4{,}49\ c/a$.

§ 71. Цилиндрические волны

Рассмотрим теперь волну, в которой распределение всех величин однородно вдоль некоторого одного направления (которое мы выберем в качестве оси z) и обладает полной аксиальной симметрией вокруг этой оси. В такой, как говорят, цилиндрической волне имеем $\varphi = \varphi(R, t)$, где посредством R обозначается расстояние до оси z. Определим общий вид такого осесимметрического решения волнового уравнения. Это можно сделать, исходя из общего вида сферически симметричного решения (70,2). R связано с r посредством $r^2 = R^2 + z^2$, так что φ, определяемое формулой (70,2), зависит при заданных t и R также и от z. Функцию, зависящую только от R и t и в то же время удовлетворяющую волновому уравнению, можно получить интегрированием выражения (70,2) по всем значениям z от $-\infty$ до $+\infty$, или, что то же, от 0 до ∞. Перейдем от интегрирования по z к интегрированию по r. Имеем

$$z = \sqrt{r^2 - R^2}, \quad dz = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - R^2}};$$

при изменении z от 0 до ∞ r меняется в пределах между R и ∞. Поэтому находим окончательно общий вид осесимметричного решения:

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct - r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\,dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct + r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\,dr, \qquad (71,1)$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Первый член представляет собой расходящуюся, а второй — сходящуюся цилиндрическую волну.

Производя в этих интегралах замену переменных $ct \pm r = \xi$, перепишем формулу (71,1) в виде

$$\varphi = \int_{-\infty}^{ct-R} \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(ct - \xi)^2 - R^2}} + \int_{ct+R}^{\infty} \frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi - ct)^2 - R^2}}. \qquad (71,2)$$

Мы видим, что значение потенциала в момент времени t (в точке R) в расходящейся цилиндрической волне определяется значениями функции $f_1(t)$ в течение всего времени от $-\infty$ до $t - R/c$; аналогично в сходящейся волне существенны значения функции $f_2(t)$ в течение всего времени от $t + R/c$ до ∞.

Как и в сферическом случае, стоячие цилиндрические волны получаются при $f_1(\xi) = -f_2(\xi)$. Можно показать, что стоячая цилиндрическая волна может быть представлена также и в следующем виде:

$$\varphi = \int_{ct-R}^{ct+R} \frac{F(\xi)\,d\xi}{\sqrt{R^2 - (\xi - ct)^2}}, \qquad (71,3)$$

где $F(\xi)$ — снова произвольная функция.

Выведем выражение для потенциала монохроматической цилиндрической волны. Волновое уравнение для потенциала $\varphi(R, t)$

в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$$

В монохроматической волне $\varphi=e^{-i\omega t}f(R)$ и для функции $f(R)$ получаем уравнение

$$f''+\frac{1}{R}f'+k^2f=0.$$

Это — уравнение функций Бесселя нулевого порядка. В стоячей цилиндрической волне φ должно оставаться конечным при $R=0$; соответствующим решением является $J_0(kR)$, где J_0 — функция Бесселя первого рода. Таким образом, в стоячей цилиндрической волне

$$\varphi=Ae^{-i\omega t}J_0(kR). \qquad (71,4)$$

При $R=0$ функция J_0 обращается в единицу, так что амплитуда волны стремится к конечной величине A. На больших же расстояниях R функцию J_0 можно заменить ее известным асимптотическим выражением, в результате чего волна приобретет вид

$$\varphi=A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(kR-\pi/4)}{\sqrt{kR}}\,e^{-i\omega t}. \qquad (71,5)$$

Решение же, соответствующее монохроматической бегущей расходящейся волне, есть

$$\varphi=Ae^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kR), \qquad (71,6)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля. При $R\to 0$ это выражение имеет логарифмическую особенность:

$$\varphi\approx A\,\frac{2i}{\pi}\ln kR\cdot e^{-i\omega t}. \qquad (71,7)$$

На больших же расстояниях имеет место асимптотическая формула

$$\varphi=A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i(kR-\omega t-\pi/4)}}{\sqrt{kR}}. \qquad (71,8)$$

Мы видим, что амплитуда цилиндрической волны падает (на больших расстояниях) обратно пропорционально корню из расстояния до оси, а интенсивность соответственно, как $1/R$. Этот результат естествен, поскольку по мере распространения волны полный поток энергии в ней распределяется по цилиндрической поверхности, площадь которой растет пропорционально R.

Цилиндрическая расходящаяся волна существенно отличается от сферической или плоской в том отношении, что она может иметь передний, но не может иметь заднего фронта: после того как звуковое возмущение дойдет до заданной точки пространства, оно уже не прекращается в ней, лишь сравнительно медленно затухая асимптотически при $t \to \infty$. Пусть функция $f_1(\xi)$ в первом члене в (71,2) отлична от нуля лишь в некотором конечном интервале значений $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$. Тогда в моменты времени $ct > R + \xi_2$ будем иметь:

$$\varphi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2 - R^2}}.$$

При $t \to \infty$ это выражение стремится к нулю по закону

$$\varphi = \frac{1}{ct} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi)\, d\xi,$$

т. е. обратно пропорционально времени.

Таким образом, потенциал расходящейся цилиндрической волны, возникшей от действовавшего в течение конечного времени источника, хотя и медленно, но обращается в нуль при $t \to \infty$. Это обстоятельство приводит, как и в сферическом случае, к равенству нулю интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p'\, dt = 0. \tag{71,9}$$

Поэтому цилиндрическая волна, как и сферическая, непременно должна содержать в себе как сгущения, так и разрежения.

§ 72. Общее решение волнового уравнения

Выведем теперь общую формулу, определяющую решение волнового уравнения в неограниченной жидкости по заданным начальным условиям, т. е. определяющую распределение скоростей и давления в жидкости в произвольный момент времени по их распределению в начальный момент.

Предварительно получим некоторые вспомогательные формулы. Пусть будут $\varphi(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$ — два каких-либо решения волнового уравнения, обращающиеся на бесконечности в нуль. Рассмотрим интеграл

$$I = \int (\varphi\dot{\psi} - \psi\dot{\varphi})\, dV,$$

взятый по всему пространству, и вычислим его производную по времени. Помня, что φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi - c^{-2}\ddot{\varphi} = 0, \quad \Delta\psi - c^{-2}\ddot{\psi} = 0,$$