как звуковое возмущение дойдет до заданной точки пространства, оно уже не прекращается в ней, лишь сравнительно медленно затухая асимптотически при $t \to \infty$. Пусть функция $f_1(\xi)$ в первом члене в (71,2) отлична от нуля лишь в некотором конечном интервале значений $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$. Тогда в моменты времени $ct > R + \xi_2$ будем иметь:

$$\varphi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2 - R^2}}.$$

При $t \to \infty$ это выражение стремится к нулю по закону

$$\varphi = \frac{1}{ct} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi)\, d\xi,$$

т. е. обратно пропорционально времени.

Таким образом, потенциал расходящейся цилиндрической волны, возникшей от действовавшего в течение конечного времени источника, хотя и медленно, но обращается в нуль при $t \to \infty$. Это обстоятельство приводит, как и в сферическом случае, к равенству нулю интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p'\, dt = 0. \qquad (71,9)$$

Поэтому цилиндрическая волна, как и сферическая, непременно должна содержать в себе как сгущения, так и разрежения.

§ 72. Общее решение волнового уравнения

Выведем теперь общую формулу, определяющую решение волнового уравнения в неограниченной жидкости по заданным начальным условиям, т. е. определяющую распределение скоростей и давления в жидкости в произвольный момент времени по их распределению в начальный момент.

Предварительно получим некоторые вспомогательные формулы. Пусть будут $\varphi(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$ — два каких-либо решения волнового уравнения, обращающиеся на бесконечности в нуль. Рассмотрим интеграл

$$I = \int (\varphi\dot{\psi} - \psi\dot{\varphi})\, dV,$$

взятый по всему пространству, и вычислим его производную по времени. Помня, что φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi - c^{-2}\ddot{\varphi} = 0, \quad \Delta\psi - c^{-2}\ddot{\psi} = 0,$$

имеем:

$$\frac{dI}{dt}=\int(\varphi\ddot{\psi}-\psi\ddot{\varphi})\,dV=c^2\int(\varphi\,\Delta\psi-\psi\,\Delta\varphi)\,dV=c^2\int\operatorname{div}(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi)dV.$$

Последний интеграл может быть преобразован в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и потому обращается в нуль. Таким образом, мы приходим к результату, что $dI/dt=0$, т. е. I есть не зависящая от времени постоянная:

$$I\equiv\int(\varphi\dot{\psi}-\dot{\varphi}\psi)\,dV=\text{const}. \qquad (72,1)$$

Рассмотрим, далее, частное решение волнового уравнения:

$$\psi=\frac{\delta\,[r-c\,(t_0-t)]}{r}, \qquad (72,2)$$

где r — расстояние от некоторой заданной точки O пространства, t_0 — некоторый определенный момент времени, а δ обозначает δ-функцию. Вычислим интеграл от ψ по пространству. Имеем:

$$\int\psi\,dV=\int_0^\infty 4\pi\psi r^2\,dr=4\pi\int_0^\infty r\delta\,[r-c\,(t_0-t)]\,dr.$$

Аргумент у δ-функции обращается в нуль при $r=c(t_0-t)$ (предполагается, что $t_0>t$). Поэтому в силу свойств δ-функции имеем:

$$\int\psi\,dV=4\pi c\,(t_0-t). \qquad (72,3)$$

Дифференцируя это равенство по t, получаем:

$$\int\dot{\psi}\,dV=-4\pi c. \qquad (72,4)$$

Подставим теперь в интеграл (72,1) в качестве ψ функцию (72,2), а под φ будем понимать искомое общее решение волнового уравнения. Согласно (72,1) I есть величина постоянная; на этом основании напишем выражения для I в моменты времени $t=0$ и $t=t_0$ и приравняем их друг другу. При $t=t_0$ обе функции ψ и $\dot{\psi}$ отличны от нуля только при $r=0$. Поэтому при интегрировании можно положить r в φ и $\dot{\varphi}$ равным нулю (т. е. взять значения в точке O) и вынести φ и $\dot{\varphi}$ из-под знака интеграла:

$$I=\varphi\,(x,\ y,\ z,\ t_0)\int\dot{\psi}dV-\dot{\varphi}\,(x,\ y,\ z,\ t_0)\int\psi dV$$

(x, y, z — координаты точки O). Согласно (72,3) и (72,4) второй член здесь обращается при $t=t_0$ в нуль, а первый дает

$$I=-4\pi c\varphi\,(x,\ y,\ z,\ t_0).$$

Вычислим теперь I при $t=0$. Написав $\dot\psi=\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{\partial t_0}$ и обозначая посредством φ_0 значение функции φ при $t=0$, имеем:

$$I=-\int\left(\varphi_0\frac{\partial\psi}{\partial t_0}+\dot\varphi_0\psi\right)dV=-\frac{\partial}{\partial t_0}\int\varphi_0\psi\Big|_{t=0}dV-\int\dot\varphi_0\psi\Big|_{t=0}dV.$$

Элемент объема пишем в виде $dV=r^2dr\,do$, где do — элемент телесного угла, и в силу свойств δ-функции получаем:

$$\int\varphi_0\psi\Big|_{t=0}dV=\int\varphi_0 r\delta(r-ct_0)\,dr\,do=ct_0\int\varphi_0\Big|_{r=ct_0}do$$

и аналогично для интеграла от $\dot\varphi_0\psi$. Таким образом,

$$I=-\frac{\partial}{\partial t_0}\left(ct_0\int\varphi_0\Big|_{r=ct_0}do\right)-ct_0\int\dot\varphi_0\Big|_{r=ct_0}do.$$

Наконец, приравнивая оба выражения для I и опуская индекс нуль у t_0, получаем окончательно:

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int\varphi_0\Big|_{r=ct}do\right)+t\int\dot\varphi_0\Big|_{r=ct}do\right\}.\quad(72{,}5)$$

Эта *формула Пуассона* определяет распределение потенциала в пространстве в любой момент времени, если задано распределение потенциала и его производной по времени (что эквивалентно заданию распределения скорости и давления) в некоторый начальный момент времени. Мы видим, что значение потенциала в момент времени t определяется значениями φ и $\dot\varphi$, которые они имели в момент времени $t=0$ на поверхности сферы с радиусом $r=ct$ и центром в точке O.

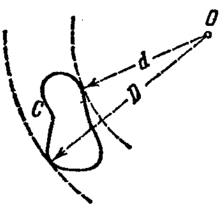

Рис. 44

Предположим, что в начальный момент времени φ и $\dot\varphi_0$ были отличны от нуля только в некоторой конечной области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью C (рис. 44). Рассмотрим значения, которые будет принимать φ в последующие моменты в некоторой точке O. Эти значения определяются значениями φ_0, $\dot\varphi_0$ на расстоянии $r=ct$ от точки O. Но сферы радиусов ct проходят через область внутри поверхности только при $d/c\leqslant t\leqslant D/c$, где d и D — наименьшее и наибольшее расстояния от точки O до поверхности C. В другие моменты времени подынтегральные выражения в (72,5) обратятся в нуль. Таким образом, движение в точке O начнется в момент $t=d/c$ и закончится в момент $t=D/c$. Распространяющаяся из области C волна имеет два фронта: передний и задний. Движение в жидкости начинается, когда к данной ее точке подходит поверхность переднего фронта, на заднем же фронте колебавшиеся ранее точки приходят в состояние покоя.

Задача

Вывести формулу, определяющую потенциал по начальным условиям для волны, зависящей только от двух координат: x и y.

Решение. Элемент поверхности сферы радиуса $r = ct$ можно, с одной стороны, написать в виде $df = c^2t^2do$, где do — элемент телесного угла. С другой стороны, проекция df на плоскость xy равна

$$dx\,dy = df\,\frac{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{ct},$$

где ρ есть расстояние от центра шара до точки x, y. Сравнив оба выражения, можно написать

$$do = \frac{dx\,dy}{ct\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}.$$

Обозначая координаты точки наблюдения посредством x, y, а координаты переменной точки в области интегрирования посредством ξ, η, мы можем, следовательно, в рассматриваемом случае заменить do в общей формуле (72,5) на

$$\frac{d\xi\,d\eta}{ct\sqrt{c^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

удвоив при этом получающееся выражение, поскольку $dx\,dy$ представляет собой проекцию двух элементов поверхности сферы, находящихся по разные стороны от плоскости x, y. Таким образом, окончательно получаем:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint \frac{\varphi_0(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{c^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \frac{1}{2\pi c}\iint \frac{\dot\varphi_0(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{c^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

где интегрирование производится по поверхности круга с центром в точке O и радиусом $r = ct$. Если в начальный момент φ_0, $\dot\varphi_0$ отличны от нуля только в конечной области C плоскости x, y (точнее — в некоторой цилиндрической области пространства с образующими, параллельными оси z), то колебания в точке O (рис. 44) начнутся в момент времени $t = d/c$, где d — ближайшее расстояние от O до этой области. Но в дальнейшем круги радиуса $ct > d$ с центром в точке O всегда будут заключать в себе часть или всю площадь области C, и φ будет стремиться к нулю только асимптотически. Таким образом, в отличие от «трехмерных» волн рассмотренные здесь двухмерные волны имеют передний, но не имеют заднего фронта (ср. § 71).

§ 73. Боковая волна

Отражение сферической волны от границы раздела между двумя средами представляет особый интерес ввиду того, что оно может сопровождаться своеобразным явлением возникновения *боковой волны*.

Пусть Q (рис. 45) — источник сферической звуковой волны, находящийся (в первой среде) на расстоянии l от плоской неограниченной поверхности раздела между двумя средами *1* и *2*. Расстояние l произвольно и отнюдь не должно быть большим