

## Задача

Вывести формулу, определяющую потенциал по начальным условиям для волны, зависящей только от двух координат:  $x$  и  $y$ .

Решение. Элемент поверхности сферы радиуса  $r = ct$  можно, с одной стороны, написать в виде  $df = c^2 t^2 do$ , где  $do$  — элемент телесного угла. С другой стороны, проекция  $df$  на плоскость  $xy$  равна

$$dx dy = df \frac{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{ct},$$

где  $\rho$  есть расстояние от центра шара до точки  $x, y$ . Сравнив оба выражения, можно написать

$$do = \frac{dx dy}{ct \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}.$$

Обозначая координаты точки наблюдения посредством  $x, y$ , а координаты переменной точки в области интегрирования посредством  $\xi, \eta$ , мы можем, следовательно, в рассматриваемом случае заменить  $do$  в общей формуле (72,5) на

$$\frac{d\xi d\eta}{ct \sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}},$$

удвоив при этом получающееся выражение, поскольку  $dx dy$  представляет собой проекцию двух элементов поверхности сферы, находящихся по разные стороны от плоскости  $x, y$ . Таким образом, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = & \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{\varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi c} \iint \frac{\dot{\varphi}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}, \end{aligned}$$

где интегрирование производится по поверхности круга с центром в точке  $O$  и радиусом  $r = ct$ . Если в начальный момент  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$  отличны от нуля только в конечной области  $S$  плоскости  $x, y$  (точнее — в некоторой цилиндрической области пространства с образующими, параллельными оси  $z$ ), то колебания в точке  $O$  (рис. 44) начнутся в момент времени  $t = d/c$ , где  $d$  — ближайшее расстояние от  $O$  до этой области. Но в дальнейшем круги радиуса  $ct > d$  с центром в точке  $O$  всегда будут заключать в себе часть или всю площадь области  $S$ , и  $\varphi$  будет стремиться к нулю только асимптотически. Таким образом, в отличие от «трехмерных» волн рассмотренные здесь двухмерные волны имеют передний, но не имеют заднего фронта (ср. § 71).

## § 73. Боковая волна

Отражение сферической волны от границы раздела между двумя средами представляет особый интерес ввиду того, что оно может сопровождаться своеобразным явлением возникновения боковой волны.

Пусть  $Q$  (рис. 45) — источник сферической звуковой волны, находящийся (в первой среде) на расстоянии  $l$  от плоской неограниченной поверхности раздела между двумя средами 1 и 2. Расстояние  $l$  произвольно и отнюдь не должно быть большим

по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Плотности двух сред и скорости звука в них пусть будут  $\rho_1, \rho_2$  и  $c_1, c_2$ .

Предположим сначала, что  $c_1 > c_2$ . Тогда на больших (по сравнению с  $\lambda$ ) расстояниях от источника движение в первой среде будет представлять собой совокупность двух расходящихся волн. Одна из них есть сферическая волна, непосредственно испускаемая источником (*прямая волна*); ее потенциал

$$\Phi_1^{(0)} = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (73.1)$$

где  $r$  — расстояние от источника, а амплитуду мы условно полагаем равной единице; множителю  $e^{-i\omega t}$  во всех выражениях мы будем в этом параграфе для краткости опускать.

Вторая же — отраженная — волна имеет волновые поверхности, представляющие собой сферы с центром в точке  $Q'$

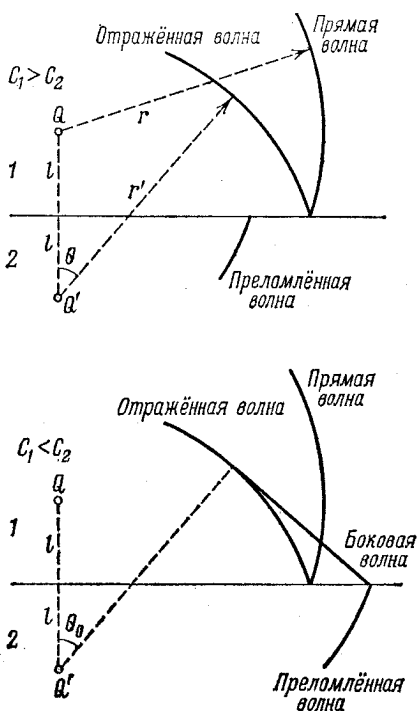


Рис. 45

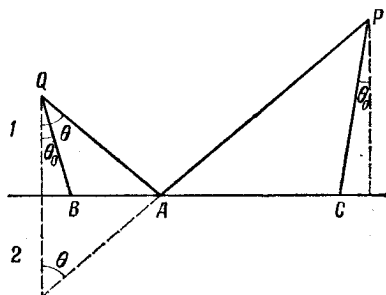


Рис. 46

(зеркальное отображение источника  $Q$  в плоскости раздела); это есть геометрическое место точек  $P$ , до которых в один и тот же промежуток времени доходят лучи, одновременно вышедшие из точки  $Q$  и отразившиеся по законам геометрической акустики от поверхности раздела (на рис. 46 луч  $QAP$  с углами падения и отражения  $\theta$ ). Амплитуда отраженной волны убывает обратно пропорционально расстоянию  $r'$  от точки  $Q'$  (последнюю называют иногда мнимым источником), но зависит, кроме того, и от угла  $\theta$  — так, как если бы каждый луч отражался с коэффициентом, соответствующим отражению плоской волны с данным углом падения  $\theta$ . Другими словами, на больших расстояниях от-

раженная волна описывается формулой

$$\varphi_1' = \frac{e^{ikr'}}{r'} \left[ \frac{c_2 \rho_2 \cos \theta - \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta}}{c_2 \rho_2 \cos \theta + \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta}} \right] \quad (73,2)$$

(ср. формулу (66,4) для коэффициента отражения плоской волны). Эта формула, справедливость которой (для больших  $r'$ ) сама по себе естественна, может быть строго выведена указанным ниже способом.

Более интересен случай, когда

$$c_1 < c_2.$$

Здесь наряду с обычной отраженной волной (73,2) в первой среде появляется еще одна волна, основные свойства которой можно усмотреть уже из следующих простых соображений.

Обычный отраженный луч  $QAP$  (рис. 46) удовлетворяет принципу Ферма в том смысле, что это есть путь наиболее быстрого пробега из точки  $Q$  в  $P$  из всех путей, лежащих целиком в среде  $I$  и испытывающих однократное отражение. Но принципу Ферма удовлетворяет (при  $c_1 < c_2$ ) и другой путь: луч падает на границу под углом полного внутреннего отражения  $\theta_0$  ( $\sin \theta_0 = c_1/c_2$ ), затем распространяется по среде  $2$  вдоль границы раздела и, наконец, снова переходит в среду  $1$  под углом  $\theta_0$  ( $QBSP$  на рис. 46); очевидно, что должно быть  $\theta > \theta_0$ . Легко видеть, что такой путь тоже обладает экстремальным свойством: время пробега по нему меньше, чем по любому другому пути из  $Q$  в  $P$ , частично проходящему во второй среде.

Геометрическое место точек  $P$ , до которых в один и тот же момент времени доходят лучи, одновременно вышедшие из  $Q$  вдоль пути  $QB$  и затем перешедшие снова в среду  $1$  в различных точках  $S$ , есть, очевидно, коническая поверхность, образующие которой перпендикулярны к прямым, проведенным из «мнимого источника»  $Q'$  под углом  $\theta_0$ .

Таким образом, если  $c_1 < c_2$ , то наряду с обычной отраженной волной со сферическим фронтом в первой среде будет распространяться еще одна волна с коническим фронтом, простирающимся от плоскости раздела (на котором он смыкается с фронтом преломленной волны во второй среде) до касания фронта сферической отраженной волны (последнее происходит по линии пересечения с конусом, с углом раствора  $\theta_0$  и осью вдоль линии  $QQ'$ , см. рис. 45). Эту коническую волну называют боковой.

Путем простого подсчета легко убедиться в том, что время пробега вдоль пути  $QBSP$  (рис. 46) меньше, чем время пробега по пути  $QAP$ , ведущему в ту же точку наблюдения  $P$ . Это значит, что звуковой сигнал из источника  $Q$  доходит до точки на-

блюдения  $P$  сначала в виде боковой волны, и лишь затем в эту точку приходит обычная отраженная волна.

Следует иметь в виду, что боковая волна представляет собой эффект волновой акустики, несмотря на то, что она допускает изложенное наглядное истолкование с помощью представлений геометрической акустики. Мы увидим ниже, что амплитуда боковой волны обращается в нуль в пределе  $\lambda \rightarrow 0$ .

Переходим теперь к количественному расчету. Распространение монохроматической звуковой волны, создаваемой точечным источником, описывается уравнением (70,7):

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - 1), \quad (73,3)$$

где  $k = \omega/c$ , а  $1$  — радиус-вектор источника. Коэффициент при  $\delta$ -функции выбран таким, чтобы прямая волна имела вид (73,1). Ниже мы выбираем систему координат с плоскостью  $x, y$  в плоскости раздела и осью  $z$  вдоль  $QQ'$ : первой среде соответствуют  $z > 0$ . На границе раздела должны быть непрерывными давление и  $z$ -компонента скорости, или, что то же, величины  $\rho\varphi$  и  $d\varphi/dz$ .

Следуя общему методу Фурье, имеем решение в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\kappa}(z) e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y)} d\kappa_x d\kappa_y, \quad (73,4)$$

$$\varphi_{\kappa}(z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi e^{-i(\kappa_x x + \kappa_y y)} dx dy. \quad (73,5)$$

Из симметрии в плоскости  $x, y$  заранее очевидно, что  $\varphi_{\kappa}$  может зависеть только от абсолютной величины  $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$ . Воспользовавшись известной формулой

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u \sin \varphi) d\varphi,$$

можно поэтому представить (73,4) в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi_{\kappa}(z) J_0(\kappa R) \kappa d\kappa, \quad (73,6)$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  — цилиндрическая координата (расстояние от оси  $z$ ). Для дальнейших вычислений будет удобно преобразовать эту формулу к виду, в котором интеграл берется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , выразив подынтегральное выражение через функцию Ганкеля  $H_0^{(1)}(u)$ . Последняя имеет, как известно, логарифмическую особенность в точке  $u = 0$ ; если условиться переходить от положительных к отрицательным вещественным зна-

чениям  $u$ , обходя (в плоскости комплексного переменного  $u$ ) точку  $u = 0$  сверху, то будет справедливо соотношение

$$H_0^{(1)}(-u) = H_0^{(1)}(ue^{i\pi}) = H_0^{(1)}(u) - 2J_0(u).$$

С его помощью можно переписать (73,6) в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\kappa}(z) H_0^{(1)}(\kappa R) \kappa d\kappa. \quad (73,7)$$

Из уравнения (73,3) находим для функции  $\varphi_{\kappa}$  уравнение

$$\frac{d^2\varphi_{\kappa}}{dz^2} - \left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi_{\kappa} = -4\pi\delta(z-l). \quad (73,8)$$

$\delta$ -функцию в правой стороне уравнения можно исключить, наложив на функцию  $\varphi_{\kappa}(z)$  (удовлетворяющую однородному уравнению) граничные условия при  $z = l$ :

$$\varphi_{\kappa}(z)|_{l-0}^{l+0} = 0, \quad \frac{d\varphi_{\kappa}}{dz}\Big|_{l-0}^{l+0} = -4\pi. \quad (73,9)$$

Граничные же условия при  $z = 0$  гласят:

$$\rho\varphi_{\kappa}\Big|_{-0}^{+0} = 0, \quad \frac{d\varphi_{\kappa}}{dz}\Big|_{-0}^{+0} = 0. \quad (73,10)$$

Ищем решение в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa} &= Ae^{-\mu_1 z} && \text{при } z > l, \\ \varphi_{\kappa} &= Be^{-\mu_1 z} + Ce^{\mu_2 z} && \text{при } l > z > 0, \\ \varphi_{\kappa} &= De^{\mu_2 z} && \text{при } 0 > z. \end{aligned} \quad (73,11)$$

Здесь

$$\mu_1^2 = \kappa^2 - k_1^2, \quad \mu_2^2 = \kappa^2 - k_2^2$$

( $k_1 = \omega/c_1$ ,  $k_2 = \omega/c_2$ ), причем надо полагать:

$$\begin{aligned} \mu &= +\sqrt{\kappa^2 - k^2} && \text{при } \kappa > k, \\ \mu &= -i\sqrt{k^2 - \kappa^2} && \text{при } \kappa < k; \end{aligned} \quad (73,12)$$

первое необходимо для того, чтобы искомое  $\varphi$  не возрастало на бесконечности, а второе — чтобы  $\varphi$  представляло собой расходящуюся волну. Условия (73,9) и (73,10) дают четыре уравнения, определяющие коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Простое вычисление приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} B &= C \frac{\mu_1 \rho_2 - \mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1}, & C &= \frac{2\pi}{\mu_1} e^{-\mu_1 l}, \\ D &= C \frac{2\rho_1 \mu_1}{\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1}, & A &= B + Ce^{2\mu_1 l}. \end{aligned} \quad (73,13)$$

При  $\rho_2 = \rho_1$ ,  $c_2 = c_1$  (т. е. если бы все пространство было заполнено одной средой)  $B$  обращается в нуль и  $A = Ce^{2\mu_1 l}$ ; соответствующий член в  $\varphi$  представляет собой, очевидно, прямую волну (73,1); поэтому интересующая нас отраженная волна есть

$$\varphi'_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) e^{-\mu_1 z} H_0^{(1)}(\kappa R) \kappa dx. \quad (73,14)$$

В этом выражении надо еще уточнить путь интегрирования. Особая точка  $\kappa = 0$  обходится (в плоскости комплексного  $\kappa$ ), как уже указывалось, сверху. Кроме того, подынтегральное выражение имеет особые точки (точки разветвления)  $\kappa = \pm k_1, \pm k_2$ , в которых  $\mu_1$  или  $\mu_2$  обращаются в нуль. В соответствии с условиями (73,10) точки  $+k_1, +k_2$  должны обходиться снизу, а точки  $-k_1, -k_2$  сверху.

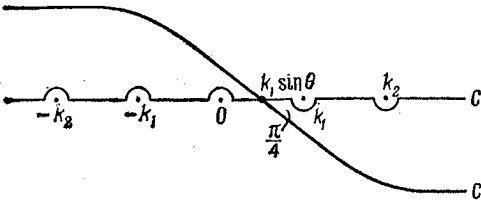


Рис. 47

Произведем исследование полученного выражения на больших расстояниях от источника. Заменяя функцию Ганкеля ее известным асимптотическим выражением, получим:

$$\varphi'_1 = \int_C \frac{\mu_1 \rho_2 - \mu_2 \rho_1}{\mu_1 (\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1)} \left( \frac{\kappa}{2i\pi R} \right)^{1/2} e^{-\mu_1(z+l) + i\kappa R} d\kappa. \quad (73,15)$$

На рис. 47 изображен путь интегрирования  $C$  для случая  $c_1 > c_2$ . Интеграл может быть вычислен с помощью известного метода перевала. Показатель

$$i[(z+l)\sqrt{k_1^2 - \kappa^2} + \kappa R]$$

имеет экстремум в точке, в которой

$$\frac{\kappa}{\sqrt{k_1^2 - \kappa^2}} = \frac{R}{z+l} = \frac{r' \sin \theta}{r' \cos \theta} = \operatorname{tg} \theta,$$

т. е.  $\kappa = k_1 \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол падения (см. рис. 45). Переходя к пути интегрирования  $C'$ , пересекающему эту точку под углом  $\pi/4$  к оси абсцисс, получим формулу (73,2).

В случае же  $c_1 < c_2$  (т. е.  $k_1 > k_2$ ) точка  $\kappa = k_1 \sin \theta$  лежит между точками  $k_2$  и  $k_1$ , если  $\sin \theta > k_2/k_1 = c_1/c_2 = \sin \theta_0$ , т. е. если  $\theta > \theta_0$  (рис. 45). В этом случае контур  $C'$  должен содержать еще петлю вокруг точки  $k_2$ , и к обычной отраженной волне (73,2) добавляется волна  $\varphi''_1$ , определяемая интегралом (73,15),

взятым по этой петле (назовем ее  $C''$ , рис. 48); это и есть боковая волна. Этот интеграл легко вычислить, если точка  $k_1 \sin \theta$  не слишком близка к  $k_2$ , т. е. если угол  $\theta$  не слишком близок к углу полного внутреннего отражения  $\theta_0$ <sup>1)</sup>.

Вблизи точки  $k = k_2$   $\mu_2$  мало; разлагаем предэкспоненциальный множитель в подынтегральном выражении в (73,15) по степеням  $\mu_2$ . Нулевой член разложения вообще не обладает особенностью при  $k = k_2$  и его интеграл по  $C''$  обращается в нуль. Поэтому имеем:

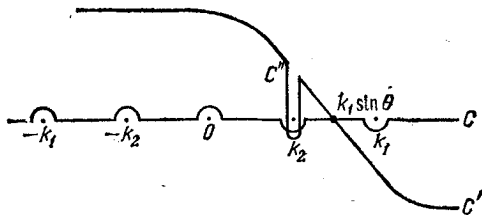


Рис. 48

$$\Phi_1'' = - \int_{C''} \frac{2\mu_2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2} \left( \frac{k}{2\pi i r} \right)^{1/2} e^{-\mu_1(z+l) + i k R} dk. \quad (73,16)$$

Разлагая показатель по степеням  $k - k_2$  и интегрируя по вертикальной петле  $C''$ , получим после простого вычисления следующее выражение для потенциала боковой волны

$$\Phi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp \{ i k_1 r' \cos(\theta_0 - \theta) \}}{r'^2 \rho_2 k_1^2 [\cos \theta_0 \sin \theta \sin^3(\theta_0 - \theta)]^{1/2}}. \quad (73,17)$$

В согласии со сказанным выше волновые поверхности представляют собой конусы

$$r' \cos(\theta - \theta_0) = R \sin \theta_0 + (z + l) \cos \theta_0 = \text{const.}$$

Вдоль заданного направления амплитуда волны убывает обратно пропорционально квадрату расстояния  $r'$ . Мы видим также, что эта волна исчезает в предельном случае  $\lambda \rightarrow 0$ . При  $\theta \rightarrow \theta_0$  выражение (73,17) становится неприменимым; в действительности в этой области амплитуда боковой волны убывает с расстоянием как  $r'^{-5/4}$ .

### § 74. Излучение звука

Колеблующееся в жидкости тело производит вокруг себя периодическое сжатие и разрежение жидкости и таким образом приводит к возникновению звуковых волн. Источником энергии, уносимой этими волнами, является кинетическая энергия движу-

<sup>1)</sup> Исследование боковой волны во всей области углов  $\theta$  см. Вреховских Л. — ЖТФ, 1948, т. 18, с. 455. Там же дан следующий член разложения обычной отраженной волны по степеням  $\lambda/R$ ; отметим здесь, что для углов  $\theta$ , близких к  $\theta_0$  (в случае  $c_1 < c_2$ ), отношение поправочного члена к основному убывает с расстояниями как  $(\lambda/R)^{1/4}$ , а не как  $\lambda/R$ .