взятым по этой петле (назовем ее C'', рис. 48); это и есть боковая волна. Этот интеграл легко вычислить, если точка $k_1 \sin\theta$ не слишком близка к k_2, т. е. если угол θ не слишком близок к углу полного внутреннего отражения θ_0 [1]).

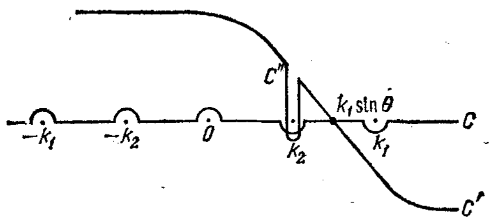

Рис. 48

Вблизи точки $\varkappa = k_2$ μ_2 мало; разлагаем предэкспоненциальный множитель в подынтегральном выражении в (73,15) по степеням μ_2. Нулевой член разложения вообще не обладает особенностью при $\varkappa = k_2$ и его интеграл по C'' обращается в нуль. Поэтому имеем:

$$\varphi_1'' = -\int_{C''} \frac{2\mu_2\rho_1}{\mu_1^2\rho_2}\left(\frac{\varkappa}{2\pi i r}\right)^{1/2} e^{-\mu_1(z+l)+i\varkappa R}\,d\varkappa. \tag{73,16}$$

Разлагая показатель по степеням $\varkappa - k_2$ и интегрируя по вертикальной петле C'', получим после простого вычисления следующее выражение для потенциала боковой волны

$$\varphi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp\{ik_1 r' \cos(\theta_0 - \theta)\}}{r'^2\rho_2 k_1^2\left[\cos\theta_0 \sin\theta \sin^3(\theta_0 - \theta)\right]^{1/2}}. \tag{73,17}$$

В согласии со сказанным выше волновые поверхности представляют собой конусы

$$r' \cos(\theta - \theta_0) = R \sin\theta_0 + (z + l)\cos\theta_0 = \text{const}.$$

Вдоль заданного направления амплитуда волны убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r'. Мы видим также, что эта волна исчезает в предельном случае $\lambda \to 0$. При $\theta \to \theta_0$ выражение (73,17) становится неприменимым; в действительности в этой области амплитуда боковой волны убывает с расстоянием как $r'^{-5/4}$.

§ 74. Излучение звука

Колеблющееся в жидкости тело производит вокруг себя периодическое сжатие и разрежение жидкости и таким образом приводит к возникновению звуковых волн. Источником энергии, уносимой этими волнами, является кинетическая энергия движу-

[1]) Исследование боковой волны во всей области углов θ см. *Бреховских Л.* — ЖТФ, 1948, т. 18, с. 455. Там же дан следующий член разложения обычной отраженной волны по степеням λ/R; отметим здесь, что для углов θ, близких к θ_0 (в случае $c_1 < c_2$), отношение поправочного члена к основному убывает с расстояниями как $(\lambda/R)^{1/4}$, а не как λ/R.

щегося тела. Таким образом, можно говорить об излучении звука колеблющимися телами.

Ниже будет везде предполагаться, что скорость u колеблющегося тела мала по сравнению со скоростью звука. Поскольку $u \sim a\omega$ (где a — линейная амплитуда колебаний тела), то это значит, что $a \ll \lambda$ [1]).

В общем случае произвольно колеблющегося тела произвольной формы задача об излучении звуковых волн должна решаться следующим образом. Выберем в качестве основной величины потенциал скорости φ. Он удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \qquad (74,1)$$

На поверхности тела нормальная составляющая скорости жидкости должна быть равна соответствующей компоненте скорости $\mathbf{u}$ тела:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_n. \qquad (74,2)$$

На больших же расстояниях от тела волна должна переходить в расходящуюся сферическую волну. Решение уравнения (74,1), удовлетворяющее этим граничным условиям и условию на бесконечности, определяет излучаемую телом звуковую волну.

Рассмотрим более подробно два предельных случая. Предположим сначала, что частота колебаний тела настолько велика, что длина излучаемой волны очень мала по сравнению с размерами l тела:

$$\lambda \ll l. \qquad (74,3)$$

В таком случае можно разделить поверхность тела на участки, размеры которых, с одной стороны, настолько малы, что их можно приближенно считать плоскими, но, с другой стороны, все же велики по сравнению с длиной волны. Тогда можно считать, что каждый такой участок излучает при своем движении плоскую волну, скорость жидкости в которой равна просто нормальной компоненте u_n скорости данного участка поверхности. Но средний поток энергии в плоской волне равен (см. § 65) $c\rho\overline{v^2}$, где v — скорость жидкости в волне. Подставляя $v = u_n$ и интегрируя по всей поверхности тела, приходим к результату, что средняя излучаемая телом в единицу времени в виде звуковых волн энергия, т. е. полная интенсивность излучаемого

[1]) Амплитуда колебаний предполагается, вообще говоря, малой также и по сравнению с размерами тела, в противном случае движение вблизи тела не будет потенциальным (ср. § 9). Это условие не обязательно лишь для чисто пульсационных колебаний, для которых используемое ниже решение (74,7) является по существу следствием уже непосредственно уравнения непрерывности.

звука, есть

$$I = c\rho \int \overline{u_n^2} df. \tag{74,4}$$

Она не зависит от частоты колебаний (при заданной амплитуде скорости).

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай, когда длина излучаемой волны велика по сравнению с размерами тела:

$$\lambda \gg l. \tag{74,5}$$

Тогда вблизи тела (на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны) в общем уравнении (74,1) можно пренебречь членом $c^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$. Действительно, этот член — порядка величины $\omega^2\varphi/c^2 \sim \varphi/\lambda^2$, между тем как вторые производные по координатам в рассматриваемой области $\sim\varphi/l^2$.

Таким образом, вблизи тела движение определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Но это — уравнение, определяющее потенциальное движение несжимаемой жидкости. Следовательно, вблизи тела жидкость движется в рассматриваемом случае как несжимаемая. Собственно звуковые волны, т. е. волны сжатия и разрежения, возникают лишь на больших расстояниях от тела.

На расстояниях, порядка размеров тела и меньших, искомое решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ не может быть написано в общем виде и зависит от конкретной формы колеблющегося тела. Для расстояний же, больших по сравнению с l, но малых по сравнению с λ (так что уравнение $\Delta\varphi = 0$ еще применимо), можно найти общий вид решения, воспользовавшись тем, что φ должно убывать с увеличением расстояния. С такими решениями уравнения Лапласа нам уже приходилось иметь дело в § 11. Как и там, пишем общий вид решения в форме

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} \tag{74,6}$$

(r — расстояние до начала координат, выбранного где-нибудь внутри тела). При этом, конечно, существенно, что расстояния, о которых идет речь, все же велики по сравнению с размерами тела. Только по этой причине можно ограничиться в φ членами, наименее быстро убывающими с ростом r. Мы оставляем в (74,6) оба написанных члена, имея в виду, что первый член не во всех случаях присутствует (см. ниже).

Выясним, в каких случаях этот член $-a/r$ отличен от нуля. В § 11 было выяснено, что потенциал $-a/r$ приводит к наличию отличного от нуля потока жидкости через поверхность, окружающую тело; этот поток равен $4\pi\rho a$. Но в несжимаемой жидкости такой поток может иметь место только за счет изменения общего объема жидкости, заключенной внутри замкнутой поверхности. Другими словами, должно происходить изменение объема тела, что и будет приводить к вытеснению жидкости из рассматриваемого объема пространства или, наоборот, к «засасыванию» жидкости в него. Таким образом, первый член в (74,6) присутствует в тех случаях, когда излучающее тело производит пульсации, сопровождающиеся изменением его объема.

Предположим, что это имеет место, и определим полную интенсивность излучаемого звука. Объем $4\pi a$ жидкости, протекающей через замкнутую поверхность, должен быть равен изменению объема V тела в единицу времени, т. е. производной dV/dt (объем V является заданной функцией времени):

$$4\pi a = \dot{V}.$$

Таким образом, на расстояниях r, удовлетворяющих условию $l \ll r \ll \lambda$, движение жидкости описывается функцией

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}.$$

С другой стороны, на расстояниях $r \gg \lambda$ (в *волновой зоне*) φ должно представлять расходящуюся сферическую волну, т. е. должно иметь вид

$$\varphi = -\frac{f(t - r/c)}{r}. \tag{74,7}$$

Поэтому мы приходим к результату, что излучаемая волна имеет на всех расстояниях (больших по сравнению с l) вид

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t - r/c)}{4\pi r}, \tag{74,8}$$

получающийся заменой в $\dot{V}(t)$ аргумента t на $t - r/c$.

Скорость $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ направлена в каждой точке по радиусу-вектору и по величине равна $v = \partial\varphi/\partial r$. При дифференцировании (74,8) надо (для расстояний $r \gg \lambda$) брать производную только от числителя; дифференцирование знаменателя привело бы к члену высшего порядка по $1/r$, которым следует пренебречь. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial r}\dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c}\ddot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

то получаем ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{v} = \frac{\ddot{V}(t - r/c)}{4\pi c r}\mathbf{n}. \tag{74,9}$$

Интенсивность излучения, определяющаяся квадратом скорости, оказывается здесь не зависящей от направления излучения, т. е. излучение симметрично по всем направлениям. Среднее значение полной излучаемой в единицу времени энергии есть

$$I = \rho c \oint \overline{v^2} df = \frac{\rho}{16c\pi^2} \oint \frac{\overline{\ddot{V}^2}}{r^2} df,$$

где интегрирование производится по замкнутой поверхности вокруг начала координат. Выбирая в качестве этой поверхности сферу радиуса r и замечая, что подынтегральное выражение зависит только от расстояния до центра, получаем окончательно:

$$I = \frac{\rho \overline{\ddot{V}^2}}{4\pi c}. \tag{74,10}$$

Это — полная интенсивность излучаемого звука. Мы видим, что она определяется квадратом второй производной по времени от объема тела.

Если тело совершает пульсационные колебания по гармоническому закону с частотой ω, то вторая производная от объема по времени пропорциональна частоте и амплитуде скорости колебаний; средний же ее квадрат пропорционален квадрату частоты. Таким образом, интенсивность излучения будет пропорциональна квадрату частоты при заданном значении амплитуды скорости точек поверхности тела. При заданной же амплитуде самих колебаний амплитуда скорости в свою очередь пропорциональна частоте, так что интенсивность излучения будет пропорциональна ω^4.

Рассмотрим теперь излучение звука телом, колеблющимся без изменения объема. Тогда в (74,6) остается только второй член, который мы напишем в виде

$$\varphi = \operatorname{div}\left(\mathbf{A}(t)\frac{1}{r}\right).$$

Как и в предыдущем случае, заключаем, что общий вид решения на всех расстояниях $r \gg l$ есть

$$\varphi = \operatorname{div}\frac{\mathbf{A}(t - r/c)}{r}.$$

То, что это выражение действительно является решением волнового уравнения, видно из того, что функция $\mathbf{A}(t - r/c)/r$ удовлетворяет этому уравнению, а потому удовлетворяют ему и производные указанной функции по координатам. Дифференцируя опять только числитель, получаем (для расстояний $r \gg \lambda$):

$$\varphi = -\frac{\dot{\mathbf{A}}(t - r/c)\,\mathbf{n}}{cr}. \tag{74,11}$$

При вычислении скорости $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ снова надо дифференцировать только $\mathbf{A}$. Поэтому имеем согласно известным из векторного анализа правилам дифференцирования функций от скалярного аргумента:

$$\mathbf{v} = -\frac{\ddot{\mathbf{A}}(t - r/c)\,\mathbf{n}}{c^2 r}\nabla\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

и, подставляя $\nabla(t - r/c) = -\nabla r/c = -\mathbf{n}/c$, получаем окончательно:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{c^2 r}\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}}). \qquad (74,12)$$

Интенсивность излучения будет теперь пропорциональна квадрату косинуса угла между направлением излучения (направление $\mathbf{n}$) и вектором $\ddot{\mathbf{A}}$ (такое излучение называют *дипольным*). Полное же излучение равно интегралу

$$I = \frac{\rho}{c^3}\int\frac{\overline{(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}})^2}}{r^2}\,df.$$

Опять выбираем в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса r, причем введем сферические координаты с полярной осью вдоль вектора $\ddot{\mathbf{A}}$. Простое интегрирование приводит к окончательной формуле для полного излучения в единицу времени:

$$I = \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \qquad (74,13)$$

Компоненты вектора $\mathbf{A}$ являются линейными функциями компонент скорости $\mathbf{u}$ тела (см. § 11). Таким образом, интенсивность излучения является здесь квадратичной функцией вторых производных от компонент скорости тела по времени.

Если тело совершает гармоническое колебательное движение с частотой ω, то, подобно предыдущему случаю, заключаем, что интенсивность излучения пропорциональна ω^4 при заданном значении амплитуды скорости. При заданной же линейной амплитуде колебаний тела амплитуда скорости сама пропорциональна частоте, и потому излучение пропорционально ω^6.

Аналогичным образом решается вопрос об излучении цилиндрических звуковых волн пульсирующим или колеблющимся перпендикулярно к своей оси цилиндром произвольного сечения. Выпишем здесь соответствующие формулы, имея в виду их дальнейшие применения.

Рассмотрим сначала пульсационные малые колебания цилиндра, и пусть $S = S(t)$ есть переменная площадь его сечения. На расстояниях r от оси цилиндра, таких, что $l \ll r \ll \lambda$ (l — поперечные размеры цилиндра), получим аналогично (74,8)

$$\varphi = \frac{\dot{S}(t)}{2\pi}\ln fr, \qquad (74,14)$$

где $f(t)$ — функция времени (коэффициент при $\ln rf$ выбран так, чтобы получить правильное значение потока жидкости через коаксиальную цилиндрическую поверхность). В соответствии с формулой для потенциала расходящейся цилиндрической волны (первый член формулы (71,2)) заключаем теперь, что на всех расстояниях $r \gg l$ потенциал определяется выражением

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')\,dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}}. \tag{74,15}$$

При $r \to 0$ главный член этого выражения совпадает с (74,14), причем автоматически определится также и функция $f(t)$ в последнем (предполагаем, что при $t \to -\infty$ производная $\dot{S}(t)$ достаточно быстро обращается в нуль). При очень же больших значениях r (в волновой зоне), основную роль в интеграле (74,15) играет область значений $t - t' \sim r/c$; поэтому в знаменателе подынтегрального выражения можно положить:

$$(t-t')^2 - \frac{r^2}{c^2} \approx 2\frac{r}{c}\left(t - t' - \frac{r}{c}\right),$$

и мы получим:

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi\sqrt{2r}} \int\limits_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')\,dt'}{\sqrt{c(t-t')-r}}. \tag{74,16}$$

Наконец, скорость $v = \partial\varphi/\partial r$; для осуществления дифференцирования удобно сделать в интеграле подстановку $t - t' - r/c = \xi$:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{2r}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\dot{S}(t - r/c - \xi)}{\sqrt{\xi}}\,d\xi,$$

после чего пределы интегрирования не будут содержать r. Множитель $r^{-1/2}$ перед интегралом не дифференцируется, так как это дало бы член более высокого порядка по $1/r$. Производя дифференцирование под знаком интеграла и перейдя затем обратно к переменной t', получим:

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{2r}} \int\limits_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\ddot{S}(t')\,dt'}{\sqrt{c(t-t')-r}}. \tag{74,17}$$

Интенсивность излучения определится произведением $2\pi r\rho c\overline{v^2}$. Обратим внимание на то, что в отличие от сферического случая здесь интенсивность излучения в каждый момент времени определяется всем ходом изменения функции $\dot{S}(t)$ за время от $-\infty$ до $t - r/c$.

Наконец, для поступательных колебаний бесконечного цилиндра в направлении, перпендикулярном к его оси, на расстояниях

$l \ll r \ll \lambda$ потенциал имеет вид

$$\varphi = \operatorname{div}(\mathbf{A} \ln fr), \tag{74,18}$$

где $\mathbf{A}(t)$ определяется путем решения уравнения Лапласа для обтекания цилиндра несжимаемой жидкостью. Отсюда снова заключаем, что на всех расстояниях $r \gg l$

$$\varphi = -\operatorname{div} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\mathbf{A}(t')\,dt'}{[(t-t')^2 - r^2/c^2]^{1/2}}. \tag{74,19}$$

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Мы полностью пренебрегали здесь влиянием вязкости жидкости и соответственно этому считали движение в излучаемой волне потенциальным. В действительности, однако, в слое жидкости толщины $(\nu/\omega)^{1/2}$ вокруг колеблющегося тела движение не потенциально (см. § 24). Поэтому для применимости всех полученных формул необходимо, чтобы толщина этого слоя была мала по сравнению с размерами l тела:

$$(\nu/\omega)^{1/2} \ll l. \tag{74,20}$$

Это условие может не выполняться при слишком малых частотах или слишком малых размерах тела.

Задачи

1. Определить полную интенсивность излучения звука шаром, совершающим поступательные малые (гармонические) колебания с частотой ω, причем длина волны сравнима по величине с радиусом R шара.

Решение. Скорость шара пишем в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$; тогда φ зависит от времени тоже посредством множителя $e^{-i\omega t}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, где $k = \omega/c$. Ищем решение в виде $\varphi = \mathbf{u}\nabla f(r)$ (начало координат выбрано в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Для f получаем уравнение $(\mathbf{u}\nabla)(\Delta f + k^2 f) = 0$, откуда $\Delta f + k^2 f = \text{const}$. С точностью до несущественной аддитивной постоянной имеем отсюда $f = Ae^{ikr}/r$. Постоянная A определяется из условия $\partial\varphi/\partial r = u_r$ при $r = R$, и в результате получаем

$$\varphi = \mathbf{u}\mathbf{r}e^{ik(r-R)}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{ikr - 1}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Излучение имеет дипольный характер. На достаточно больших расстояниях от шара можно пренебречь единицей по сравнению с ikr, и φ приобретает вид (74,11) с вектором $\dot{\mathbf{A}}$, равным

$$\dot{\mathbf{A}} = -\mathbf{u}e^{ik(r-R)}R^3 \frac{i\omega}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Замечая, что $\overline{(\operatorname{Re}\ddot{\mathbf{A}})^2} = |\ddot{\mathbf{A}}|^2/2$, получаем для полного излучения согласно (74,13):

$$I = \frac{2\pi\rho}{3c^3}|\mathbf{u}_0|^2 \frac{R^6\omega^4}{4 + \omega^4R^4/c^4}.$$

При $\omega R/c \ll 1$ это выражение переходит в

$$I = \frac{\rho\pi R^6}{6c^3} |\mathbf{u}_0|^2 \omega^4$$

(это может быть получено и непосредственно подстановкой в (74,13) выражения $\mathbf{A} = \mathbf{u}R^3/2$ из задачи 1 § 11). При $\omega R/c \gg 1$ имеем:

$$I = \frac{2\pi\rho c}{3} R^2 |\mathbf{u}_0|^2,$$

что соответствует формуле (74,4).

Действующая на шар сила сопротивления жидкости получается интегрированием проекции сил давления $(p' = -\rho\dot{\varphi}'|_{r=R})$ на направление $\mathbf{u}$ по поверхности шара и равна

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3} \rho\omega R^3 \mathbf{u} \frac{-k^3R^3 + i(2 + k^2R^2)}{4 + k^4R^4}$$

(о смысле комплексной силы сопротивления см. конец § 24).

2. То же, если радиус R шара сравним по величине с $\sqrt{\nu/\omega}$ (но в то же время $\lambda \gg R$).

Решение. Если размеры тела невелики по сравнению с $\sqrt{\nu/\omega}$, то для определения излучаемой волны надо исходить не из уравнения $\Delta\varphi = 0$, а из уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости. Соответствующее решение этого уравнения для шара определяется формулами (1), (2) в задаче 5 § 24. При переходе к большим расстояниям первый член в (1), экспоненциально затухающий с r, можно опустить. Второй же член приводит к скорости

$$\mathbf{v} = -b(\mathbf{u}\nabla)\nabla\frac{1}{r}.$$

Сравнение с (74,6) показывает, что

$$\mathbf{A} = -b\mathbf{u} = \frac{R^3}{2}\left[1 - \frac{3}{(i-1)\varkappa} - \frac{3}{2i\varkappa^2}\right]\mathbf{u},$$

где $\varkappa = R(\omega/2\nu)^{1/2}$, т. е. отличается от соответствующего выражения для идеальной жидкости множителем, стоящим в скобках. В результате получаем:

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^3} \omega^4 \left(1 + \frac{3}{\varkappa} + \frac{9}{2\varkappa^2} + \frac{9}{2\varkappa^3} + \frac{9}{4\varkappa^4}\right) |\mathbf{u}_0|^2.$$

При $\varkappa \gg 1$ это выражение переходит в приведенную в задаче 1 формулу, а при $\varkappa \ll 1$ получаем:

$$I = \frac{3\pi\rho R^2\nu^2}{2c^3} \omega^2 |\mathbf{u}_0|^2,$$

т. е. излучение пропорционально не четвертой, а второй степени частоты.

3. Определить интенсивность излучения звука сферой, совершающей малые (гармонические) пульсационные колебания с произвольной частотой.

Решение. Ищем звуковую волну в виде

$$\varphi = \frac{au}{r} e^{ik(r-R)}$$

(R — равновесный радиус шара) и определяем постоянную a из условия

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = u = u_0 e^{-i\omega t},$$

где u — радиальная скорость точек поверхности сферы:

$$a = \frac{R^2}{ikR-1}.$$

Интенсивность излучения:

$$I = 2\pi\rho c\,|u_0|^2 \frac{k^2R^4}{1+k^2R^2}.$$

При $kR \ll 1$

$$I = \frac{2\pi\rho}{c}\,\omega^2 R^4\,|u_0|^2$$

в соответствии с (74,10), а при $kR \gg 1$

$$I = 2\pi\rho c R^2\,|u_0|^2$$

в соответствии с (74,4).

4. Определить волну, излучаемую шаром (радиуса R), совершающим малые пульсационные колебания; радиальная скорость точек его поверхности есть произвольная функция времени $u(t)$.

Решение. Решение ищем в виде $\varphi = f(t')/r$, где $t' = t-(r-R)/c$, и определяем f из граничного условия $(\partial\varphi/\partial r)_{r=R} = u(t)$, которое приводит к уравнению

$$\frac{df}{dt} + \frac{cf(t)}{R} = -Rcu(t).$$

Решая это линейное уравнение и заменяя в решении аргумент t на t', получаем:

$$\varphi(r, t) = -\frac{cR}{r} e^{-ct'/R} \int_{-\infty}^{t'} u(\tau)\, e^{c\tau/R}\, d\tau. \qquad (1)$$

Если колебания шара прекращаются, например, в момент времени $t=0$ (т. е. $u(\tau)=0$ при $\tau>0$), то на расстоянии r от центра, начиная с момента времени $t=(r-R)/c$, потенциал как функция времени будет иметь вид $\varphi = \mathrm{const}\, e^{-ct/R}$, т. е. движение будет затухать экспоненциально.

Пусть T — время, в течение которого происходит существенное изменение скорости $u(t)$. Если $T \gg R/c$ (т. е. длина излучаемых волн $\lambda \sim cT \gg R$), то в (1) можно вынести медленно меняющийся множитель $u(\tau)$ из-под знака интеграла, заменив его на $u(t')$. На расстояниях $r \gg R$ получим тогда:

$$\varphi = -\frac{R^2}{r}\, u\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

что совпадает с формулой (74,8). Если же $T \ll R/c$, то аналогично получаем:

$$\varphi = -\frac{cR}{r}\int_{-\infty}^{t'} u(\tau)\, d\tau, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{R}{r}\, u(t'),$$

что соответствует формуле (74,4).

5. Определить движение, возникающее в идеальной сжимаемой жидкости при произвольном поступательном движении в ней шара радиуса R (скорость движения мала по сравнению со скоростью звука).

Решение. Ищем решение в виде

$$\varphi = \operatorname{div}\frac{\mathbf{f}(t')}{r} \qquad (1)$$

(r — расстояние от начала координат, выбранного в точке нахождения центра шара в момент времени $t' = t - (r - R)/c$); поскольку скорость шара $\mathbf{u}$ мала по сравнению со скоростью звука, то эффектом перемещения начала координат можно пренебречь). Скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{3(\mathbf{fn})\mathbf{n} - \mathbf{f}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{f}'\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{f}'}{cr^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{nf}'')}{c^2 r} \tag{2}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления $\mathbf{r}$; $'$ означает дифференцирование $\mathbf{f}$ по его аргументу). Граничное условие $v_r = \mathbf{un}$ при $r = R$, откуда

$$\mathbf{f}''(t) + \frac{2c}{R}\mathbf{f}'(t) + \frac{2c^2}{R^2}\mathbf{f}(t) = Rc^2\mathbf{u}(t).$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных, получаем для функции $\mathbf{f}(t)$ общее выражение:

$$\mathbf{f}(t) = cR^2 e^{-ct/R} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\tau) \sin\frac{c(t-\tau)}{R} e^{\tau c/R}\, d\tau. \tag{3}$$

При подстановке в (1) здесь надо писать t' вместо t. В качестве нижнего предела выбрано $-\infty$ так, чтобы было $\mathbf{f} = 0$ при $t = -\infty$.

6. Шар радиуса R в момент времени $t = 0$ начинает двигаться с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$. Определить возникающее в момент начала движения звуковое излучение.

Решение. Полагая в формуле (3) задачи 5 $\mathbf{u}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0$ при $\tau > 0$ и подставляя в формулу (2) (сохранив в последней только последний, наименее быстро убывающий с расстоянием член), найдем скорость движения жидкости вдали от шара:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{n}(\mathbf{nu}_0)\frac{R\sqrt{2}}{r} e^{-ct'/R} \sin\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(где $t' > 0$). Полная интенсивность излучения будет убывать со временем по закону

$$I = \frac{8\pi}{3} c\rho R^2 u_0^2 e^{-2ct'/R} \sin^2\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Всего за все время будет излучена энергия

$$\frac{\pi}{3}\rho R^3 u_0^2.$$

7. Определить интенсивность излучения звука бесконечным цилиндром (радиуса R), совершающим пульсационные гармонические колебания; длина волны $\lambda \gg R$.

Решение. Согласно формуле (74,14) находим сначала, что на расстояниях $r \ll \lambda$ (в задачах 7, 8 r — расстояние от оси цилиндра) потенциал

$$\varphi = Ru \ln kr,$$

где $u = u_0 e^{-i\omega t}$ — скорость точек поверхности цилиндра. Из сравнения с формулами (71,7) и (71,8) находим теперь, что на больших расстояниях потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -Ru\sqrt{\frac{i\pi}{2kr}} e^{ikr}.$$

Отсюда скорость

$$\mathbf{v} = Ru\sqrt{\frac{\pi k}{2ir}}\,\mathbf{n} e^{ikr}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к оси цилиндра) и интенсивность излучения (на единицу длины цилиндра)

$$I = \frac{\pi^2}{2} \rho\omega R^2 |u_0|^2.$$

8. Определить излучение звука цилиндром, совершающим гармонические поступательные колебания в направлении, перпендикулярном к своей оси.

Решение. На расстояниях $r \ll \lambda$ имеем:

$$\varphi = -\operatorname{div}(R^2\mathbf{u} \ln kr)$$

(ср. формулу (74,18) и задачу 3 § 10). Отсюда заключаем, что на больших расстояниях

$$\varphi = R^2 \sqrt{\frac{i\pi}{2k}} \operatorname{div} \frac{e^{ikr}\mathbf{u}}{\sqrt{r}} = -R^2 (\mathbf{un}) \sqrt{\frac{\pi k}{2ir}} e^{ikr},$$

откуда скорость

$$\mathbf{v} = -kR^2 \sqrt{\frac{i\pi k}{2r}} \mathbf{n} (\mathbf{un}) e^{ikr}.$$

Интенсивность излучения будет пропорциональна квадрату косинуса угла между направлениями колебаний и излучения. Полная интенсивность

$$I = \frac{\pi^2}{4c^2} \rho\omega^3 R^4 |\mathbf{u}_0|^2.$$

9. Определить интенсивность излучения звука от плоской поверхности с периодически колеблющейся температурой, частота колебаний $\omega \ll c^2/\chi$, где χ — температуропроводность жидкости.

Решение. Пусть переменная часть температуры поверхности есть $T_0' e^{-i\omega t}$. Эти колебания температуры создают в жидкости затухающую тепловую волну (52,15):

$$T' = T_0' e^{-i\omega t} e^{-(1-i)\sqrt{\omega/2\chi}\, x},$$

в результате чего будет испытывать колебания и плотность жидкости:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' = -\rho\beta T',$$

где β — температурный коэффициент расширения. Это в свою очередь приводит к возникновению движения, определяющегося уравнением непрерывности:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -i\omega\rho\beta T'.$$

На твердой поверхности скорость $v_x = v = 0$, а при удалении от нее стремится к пределу

$$v = -i\omega\beta \int_0^\infty T'\, dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \beta \sqrt{\omega\chi}\, T_0' e^{-i\omega t}.$$

Это значение достигается на расстояниях $\sim \sqrt{\chi/\omega}$, малых по сравнению с c/ω, и служит граничным условием для возникающей звуковой волны. Отсюда находим интенсивность излучения звука с 1 см² поверхности:

$$I = \frac{1}{2} c\rho\beta^2\omega\chi |T_0'|^2.$$

10. Точечный источник, излучающий сферическую волну, находится на расстоянии l от твердой (полностью отражающей звук) стенки, ограничивающей заполненное жидкостью полупространство. Определить отношение полной интенсивности излучаемого источником звука к интенсивности излучения, которое имело бы место в неограниченной среде, а также зависимость интенсивности от направления на больших расстояниях от источника.

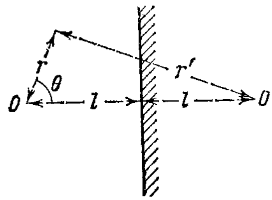

Рис. 49

Решение. Совокупность излучаемой и отраженной от стенки волн описывается решением волнового уравнения, удовлетворяющим условию равенства нулю нормальной скорости $v_n = \partial\varphi/\partial n$ на стенке. Таким решением является

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega t}$$

(постоянный множитель для краткости опускаем), где r — расстояние от источника звука O (рис. 49), а r' — расстояние от точки O', расположенной относительно поверхности стенки симметрично с O. На больших расстояниях от источника имеем: $r' \approx r - 2l\cos\theta$, так что

$$\varphi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(1 + e^{-2ilk\cos\theta}\right).$$

Зависимость интенсивности излучения от направления определяется здесь множителем $\cos^2(kl\cos\theta)$.

Для определения полной интенсивности излучения интегрируем поток энергии

$$\overline{\mathbf{q}} = \overline{p'\mathbf{v}} = -\overline{\rho\dot{\varphi}\nabla\varphi}$$

(см. (65,4)) по поверхности сферы сколь угодно малого радиуса с центром в точке O. Это дает

$$2\pi\rho k\omega\left(1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}\right).$$

В неограниченной же среде мы имели бы чисто сферическую волну $\varphi = e^{i(kr-\omega t)}/r$ с полным потоком энергии $2\pi\rho k\omega$. Таким образом, искомое отношение интенсивностей равно

$$1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$

11. То же в жидкости, ограниченной свободной поверхностью.

Решение. На свободной поверхности должно выполняться условие $p' = -\rho\dot{\varphi} = 0$; в монохроматической волне это эквивалентно требованию $\varphi = 0$. Соответствующее решение волнового уравнения есть

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega t}.$$

На больших расстояниях от источника интенсивность излучения определяется множителем $\sin^2(kl\cos\theta)$.

Искомое соотношение интенсивностей равно

$$1 - \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$