§ 75. Возбуждение звука турбулентностью

Турбулентные пульсации скорости тоже являются источником возбуждения звука в окружающем объеме жидкости. В этом параграфе будет изложена общая теория этого явления (*M J Lighthill*, 1952). Будет рассматриваться ситуация, когда турбулентность занимает конечную область V_0, окруженную неограниченным объемом неподвижной жидкости. При этом самая турбулентность рассматривается в рамках теории несжимаемой жидкости — вызываемым пульсациями изменением плотности пренебрегаем; это значит, что скорость турбулентного движения предполагается малой по сравнению со скоростью звука (как это предполагалось и во всей главе III).

Начнем с вывода общего уравнения, учитывающего, наряду с движением в звуковых волнах, также и движение жидкости в турбулентной области. Отличие от произведенного в § 64 вывода состоит лишь в том, что должен быть сохранен нелинейный член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ — хотя скорость v мала по сравнению с c, но она велика по сравнению со скоростью жидкости в звуковой волне. Поэтому вместо (64,3) пишем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} p' = 0.$$

Применив к этому уравнению операцию div и используя уравнение (64,5)

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

получим:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right).$$

Правую сторону этого уравнения можно преобразовать с помощью уравнения непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (турбулентность рассматривается как несжимаемая!): можно вынести знак дифференцирования по x_k из-под скобок. Окончательно пишем:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho \frac{\partial^2 T_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad T_{ik} = v_i v_k \tag{75,1}$$

(индекс у ρ_0 снова опускаем). Вне турбулентной области выражение в правой стороне этого уравнения представляет собой малую величину второго порядка и может быть опущено, так что мы возвращаемся к волновому уравнению распространения звука. Правая же сторона, отличная от нуля в объеме V_0, играет роль источника звука. В этом объеме $\mathbf{v}$ — скорость турбулентного движения.

Уравнение (75,1) — типа уравнения запаздывающих потенциалов. Решение этого уравнения, описывающее исходящее от источника излучение, есть

$$p'(\mathbf{r},\ t)=\frac{\rho}{4\pi}\int\left.\frac{\partial^2 T_{ik}(\mathbf{r}_1,\ t)}{\partial x_{1i}\partial x_{1k}}\right|_{t-R/c}\frac{dV_1}{R} \tag{75,2}$$

(см. II, § 62). Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{r}_1$ — бегущей точки в области интегрирования, $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|$; подынтегральное выражение берется в «запаздывающий» момент времени $t-R/c$. Интегрирование в (75,2) фактически производится лишь по объему V_0, в котором подынтегральное выражение отлично от нуля.

Основная часть энергии турбулентного движения заключена в частотах $\sim u/l$, отвечающих основному масштабу турбулентности l; u — характерная скорость движения (см. § 33). Таковы же будут, очевидно, и основные частоты в спектре излучаемых звуковых волн. Соответствующие же длины волн $\lambda\sim cl/u\gg l$.

Для определения интенсивности излучения достаточно рассмотреть звуковое поле на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны λ (в «волновой зоне»), эти расстояния велики и по сравнению с линейными размерами источника — турбулентной области[1]). Множитель $1/R$ в подынтегральном выражении в этой зоне можно заменить множителем $1/r$ и вынести его из-под знака интеграла (r — расстояние точки наблюдения до начала координат, выбранного где-либо внутри источника); тем самым мы пренебрегаем членами, убывающими быстрее, чем $1/r$, которые все равно не дают вклада в интенсивность уходящих на бесконечность волн. Таким образом,

$$p'(\mathbf{r},\ t)=\frac{\rho}{4\pi r}\int\left.\frac{\partial^2 T_{ik}(\mathbf{r}_1,\ t)}{\partial x_{1i}\partial x_{1k}}\right|_{t-R/c}dV_1. \tag{75,3}$$

Производные в подынтегральном выражении берутся до взятия значения при $t-R/c$, т. е. только по первому аргументу функций $T_{ik}(\mathbf{r}_1, t)$. Эти производные можно заменить производными от функций $T_{ik}(\mathbf{r},\ t-R/c)$, взятыми по обоим аргументам, вычитая из них каждый раз производные по второму аргументу. Первые представляют собой полные дивергенции и интегралы от них, будучи преобразованы в интегралы по удаленным замкнутым поверхностям, обращаются в ноль, поскольку вне турбулентной области $T_{ik}=0$. Производные же по «текущим» координатам $\mathbf{r}_1$, входящим в состав аргумента $t-R/c$, можно заменить производными по координатам точки наблюде-

[1]) Говоря о порядках величин, мы не проводим различия между основным масштабом l и размерами турбулентной области, хотя последние и могут заметно превышать первый.

ния $\mathbf{r}$, поскольку $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ входят только в виде разности $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$. Таким образом, приходим к выражению

$$p'(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho}{4\pi r} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \int T_{ik}\left(\mathbf{r}_1, t - \frac{R}{c}\right) dV_1. \tag{75,4}$$

Время $t - R/c$ отличается от времени $t - r/c$ на интервал $\sim l/c$. Но такой интервал времени мал по сравнению с периодами l/u основных турбулентных пульсаций. Это позволяет заменить аргумент $t - R/c$ в подынтегральном выражении на $t - r/c \equiv \tau$ [1]). Производя после этого дифференцирование под знаком интеграла, и заметив, что $\partial r/\partial x_i = n_i$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$), получим:

$$p'(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho}{4\pi c^2 r} n_i n_k \int \ddot{T}_{ik}(\mathbf{r}_1, \tau)\, dV_1, \tag{75,5}$$

где точка означает дифференцирование по τ.

Тензор $\ddot{T}_{ik}$, как и всякий симметричный тензор с неравным нулю следом, может быть представлен в виде

$$\ddot{T}_{ik} = \left(\ddot{T}_{ik} - \frac{1}{3}\ddot{T}_{ll}\delta_{ik}\right) + \frac{1}{3}\ddot{T}_{ll}\delta_{ik} \equiv Q_{ik} + Q\delta_{ik}, \tag{75,6}$$

где Q_{ik} — «неприводимый» тензор с равным нулю следом, а Q — скаляр. Тогда сферическая волна (75,5) разобьется на сумму двух членов

$$p'(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho}{4\pi c^2 r} \left\{ \int Q(\mathbf{r}_1, \tau)\, dV_1 + n_i n_k \int Q_{ik}(\mathbf{r}_1, \tau)\, dV_1 \right\}, \tag{75,7}$$

из которых первый представляет собой излучение монопольного, а второй — квадрупольного источника.

Вычислим полную интенсивность излучения. Плотность потока звуковой энергии в волновой зоне направлена в каждой точке вдоль направления $\mathbf{n}$, а по величине равна $q = p'^2/c\rho$. Полная интенсивность получается умножением q на $r^2 do$ и интегрированием по всем направлениям $\mathbf{n}$ [2]). Фактически нас интересует, однако, не мгновенное пульсирующее значение интенсивности, а ее усредненное по времени значение (турбулентность предпо-

[1]) При этом мы отказываемся от рассмотрения спектрального состава излучения и ограничиваемся основными частотами, определяющими полную интенсивность. Отметим также, что указанную замену нельзя было бы произвести на более ранней стадии преобразований, в (75,3), поскольку интеграл обратился бы в нуль.

[2]) Интегрирование по направлениям $\mathbf{n}$ осуществляется следующими выражениями для средних значений произведений двух или четырех компонент вектора $\mathbf{n}$:

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

лагается при этом «стационарной»). Эту последнюю операцию осуществляем, написав квадрат интегралов в виде двойных интегралов и производя усреднение (которое обозначаем угловыми скобками) под знаком интегралов. В результате получим следующий результат:

$$I = \frac{\rho_0}{60\pi c^5} \iint \langle Q(\mathbf{r}_1, \tau) Q(\mathbf{r}_2, \tau)\rangle dV_1 dV_2 + \\ + \frac{\rho_0}{30\pi c^5} \iint \langle Q_{ik}(\mathbf{r}_1, \tau) Q_{ik}(\mathbf{r}_2, \tau)\rangle dV_1 dV_2. \quad (75{,}8)$$

«Перекрестное» произведение двух членов в (75,7) при интегрировании по направлениям выпадает, так что полная интенсивность оказывается равной сумме монопольного и квадрупольного излучений. Обе эти части в данном случае — вообще говоря, одинакового порядка величины.

Оценим этот порядок величины (вернее — выясним зависимость I от параметров турбулентного движения). Компоненты тензора $T_{ik} \sim u^2$, где u — характерная скорость турбулентного движения. Каждое дифференцирование по времени умножает этот порядок величин на характерную частоту u/l. Поэтому $Q \sim u^4/l^2$. Корреляция между скоростями турбулентных пульсаций в различных точках простирается на расстояния $\sim l$. Поэтому количество энергии, испускаемой в виде звука единицей массы турбулентной среды в единицу времени

$$\varepsilon_{\text{зв}} \sim \frac{1}{c^5} \frac{u^8}{l^4} l^3 = \frac{u^8}{c^5 l}. \quad (75{,}9)$$

Интенсивность излучения пропорциональна, таким образом, восьмой степени скорости турбулентного движения.

Турбулентное движение поддерживается за счет мощности, подводимой от некоторого внешнего источника. В «стационарном» случае эта мощность совпадает с диссипируемой в единицу времени энергией. Отнесенная к единице массы, эта последняя $\varepsilon_{\text{дисс}} \sim u^3/l$ [1]). Акустический коэффициент полезного действия можно определить как отношение излучаемой мощности к диссипируемой:

$$\frac{\varepsilon_{\text{зв}}}{\varepsilon_{\text{дисс}}} \sim \left(\frac{u}{c}\right)^5. \quad (75{,}10)$$

Стоящая здесь высокая степень отношения u/c приводит к тому, что при $u/c \ll 1$ эффективность турбулентности как излучателя звука низка.

---

[1]) См. (33,1). Мы не делаем здесь различия между u и Δu; выбор системы отсчета, по отношению к которой рассматривается движение, устанавливается тем, что жидкость вне турбулентной области предполагается неподвижной.