§ 76. Принцип взаимности

При выводе уравнений звуковой волны в § 64 предполагалось, что волна распространяется в однородной среде. В частности, плотность среды ρ_0 и скорость звука в ней c рассматривались как постоянные величины. Имея в виду получить некоторые общие соотношения, применимые и в общем случае произвольной неоднородной среды, выведем предварительно уравнение распространения звука в такой среде.

Напишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Но в силу адиабатичности звука имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla p\right),$$

и уравнение непрерывности приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Положим, как обычно, $\rho = \rho_0 + \rho'$, причем ρ_0 является теперь заданной функцией координат. Что же касается давления, то в $p = p_0 + p'$ должно по-прежнему быть $p_0 = \mathrm{const}$, поскольку в равновесии давление должно быть постоянно вдоль всей среды (если, конечно, отсутствует внешнее поле). Таким образом, с точностью до величин второго порядка малости имеем:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Это уравнение совпадает по форме с уравнением (64,5), но коэффициент $\rho_0 c^2$ в нем есть функция координат. Что касается уравнения Эйлера, то мы имеем, как и в § 64:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}.$$

Исключая $\mathbf{v}$ из обоих этих уравнений (и опуская индекс у ρ_0), получаем окончательно уравнение распространения звука в неоднородной среде:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} - \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \tag{76,1}$$

Если речь идет о монохроматической волне с частотой ω, то $\ddot{p}' = -\omega^2 p'$, так что

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p' = 0. \tag{76,2}$$

Рассмотрим звуковую волну, излучаемую источником небольших размеров, совершающим пульсационные колебания (такое излучение, как мы видели в § 74, изотропно). Обозначим точку, в которой находится источник, посредством A, а давление p' в излучаемой им волне в точке B[1]) посредством $p_A(B)$. Если тот же самый источник помещен в точку B, то создаваемое им в точке A давление обозначим соответственно посредством $p_B(A)$. Выведем соотношение между $p_A(B)$ и $p_B(A)$.

Для этого воспользуемся уравнением (76,2), применив его один раз к излучению источника, находящегося в точке A, а другой раз — к излучению источника, находящегося в B:

$$\operatorname{div}\frac{\nabla p'_A}{\rho}+\frac{\omega^2}{\rho c^2}p'_A=0,\quad \operatorname{div}\frac{\nabla p'_B}{\rho}+\frac{\omega^2}{\rho c^2}p'_B=0.$$

Умножим первое уравнение на p'_B, а второе на p'_A, и вычтем второе из первого. Получаем:

$$p'_B\operatorname{div}\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\operatorname{div}\frac{\nabla p'_B}{\rho}=\operatorname{div}\left(\frac{p'_B\nabla p'_A}{\rho}-\frac{p'_A\nabla p'_B}{\rho}\right)=0.$$

Проинтегрируем это уравнение по объему, заключенному между бесконечно удаленной замкнутой поверхностью C и двумя малыми сферами C_A и C_B, окружающими соответственно точки A и B. Объемный интеграл преобразуется в интеграл по этим трем поверхностям, причем интеграл по C обращается в нуль, поскольку на бесконечности звуковое поле исчезает. Таким образом, получим:

$$\int\limits_{C_A+C_B}\left(p'_B\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right)d\mathbf{f}=0. \tag{76,3}$$

Внутри малой сферы C_A давление p'_A в волне, создаваемой источником, находящимся в A, быстро меняется с расстоянием от A, и потому градиент $\nabla p'_A$ велик. Давление же p'_B, создаваемое источником, находящимся в B, в области вблизи точки A, значительно удаленной от B, является медленно меняющейся функцией координат, так что его градиент $\nabla p'_B$ относительно мал. При достаточно малом радиусе сферы C_A можно поэтому в интеграле по ней пренебречь вторым членом подынтегрального выражения по сравнению с первым, а в последнем можно вынести почти постоянную величину p'_B из-под знака интеграла, заменив ее значением в точке A. Аналогичные рассуждения применимы к интегралу по сфере C_B, и в результате мы получаем из (76,3) следующее соотношение:

$$p'_B(A)\int\limits_{C_A}\frac{\nabla p'_A}{\rho}d\mathbf{f}=p'_A(B)\int\limits_{C_B}\frac{\nabla p'_B}{\rho}d\mathbf{f}.$$

[1]) Размеры источника должны быть малыми по сравнению с расстоянием между A и B, а также по сравнению с длиной волны.

Но $\nabla p'/\rho = -\partial \mathbf{v}/\partial t$; поэтому это равенство можно переписать в виде

$$p'_B(A)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{C_A}\mathbf{v}_A\,d\mathbf{f}=p'_A(B)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{C_B}\mathbf{v}_B\,d\mathbf{f}.$$

Интеграл $\int\limits_{C_A}\mathbf{v}_A\,d\mathbf{f}$ представляет собой количество жидкости, протекающей через поверхность сферы C_A в единицу времени, т. е. изменение (в 1 сек.) объема пульсирующего источника звука. Поскольку источники в точках A и B тождественны, то ясно, что

$$\int\limits_{C_A}\mathbf{v}_A\,d\mathbf{f}=\int\limits_{C_B}\mathbf{v}_B\,d\mathbf{f},$$

и, следовательно,

$$p'_A(B)=p'_B(A). \tag{76,4}$$

Это равенство представляет собой содержание так называемого принципа взаимности: давление, создаваемое в точке B источником, находящимся в точке A, равно давлению, создаваемому в A таким же источником, находящимся в B. Подчеркнем, что этот результат относится, в частности, и к тому случаю, когда среда представляет собой совокупность нескольких различных областей, каждая из которых однородна. При распространении звука в такой среде на поверхностях раздела различных областей происходит отражение и преломление. Таким образом, принцип взаимности применим и в тех случаях, когда на пути своего распространения от точки A к B и обратно волна испытывает отражения и преломления.

Задача

Вывести принцип взаимности для дипольного звукового излучения, создаваемого источником, совершающим колебания без изменения своего объема.

Решение. В данном случае

$$\int\limits_{C_A}\mathbf{v}_A\,d\mathbf{f}=0 \tag{1}$$

и при вычислении интегралов в (76,3) необходимо учесть следующее приближение. Для этого пишем с точностью до членов первого порядка

$$p'_B=p'_B(A)+\mathbf{r}\,\nabla p'_B, \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из точки A. В интеграле

$$\int\limits_{C_A}\left(p'_B\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right)d\mathbf{f} \tag{3}$$

оба члена имеют теперь одинаковый порядок величины. Подставляя сюда p'_B из (2) и учитывая (1), получим

$$\int\limits_{C_A} \left\{ (\mathbf{r}\,\nabla p'_B) \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right\} d\mathbf{f}.$$

Далее, выносим почти постоянную величину $\nabla p'_B = -\rho \dot{\mathbf{v}}_B$ из-под знака интеграла, заменив ее значением в точке A:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}}_B(A) \int\limits_{C_A} \left\{ \frac{p'_A}{\rho} d\mathbf{f} - \mathbf{r}\left(\frac{\nabla p'_A}{\rho} d\mathbf{f} \right) \right\}$$

(ρ_A — плотность среды в точке A). Для вычисления этого интеграла замечаем, что вблизи источника жидкость можно считать несжимаемой (см. § 74), и потому для давления внутри малой сферы C_A можно написать согласно (11,1)

$$p'_A = -\rho \dot{\varphi} = \rho \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{r^3}.$$

В монохроматической волне $\dot{\mathbf{v}} = -i\omega\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{A}} = -i\omega\mathbf{A}$; вводя также единичный вектор $\mathbf{n}_A$ в направлении вектора $\mathbf{A}$ для источника, находящегося в точке A, найдем, что интеграл (3) пропорционален по величине

$$\rho_A \mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A.$$

Аналогично интеграл по сфере C_B будет пропорционален

$$-\rho_B \mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B$$

с тем же коэффициентом пропорциональности. Приравнивая их сумму нулю, найдем искомое соотношение

$$\rho_A \mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A = \rho_B \mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B,$$

выражающее собой принцип взаимности для дипольного звукового излучения.

§ 77. Распространение звука по трубке

Рассмотрим распространение звуковой волны вдоль длинной узкой трубки. Под узкой подразумевается трубка, ширина которой мала по сравнению с длиной волны. Сечение трубки может меняться вдоль ее длины как по форме, так и по площади. Важно только, чтобы это изменение происходило достаточно медленно, — площадь S сечения должна мало меняться на расстояниях порядка ширины трубки.

В этих условиях можно считать, что вдоль каждого поперечного сечения трубки все величины (скорость, плотность и т. п.) постоянны. Направление же распространения волны можно считать везде совпадающим с направлением оси трубки. Уравнение, определяющее распространение такой волны, удобнее всего вывести методом, аналогичным примененному в § 12 для вывода уравнения распространения гравитационных волн в каналах.