оба члена имеют теперь одинаковый порядок величины. Подставляя сюда p'_B из (2) и учитывая (1), получим

$$\int\limits_{C_A} \left\{ (\mathbf{r}\,\nabla p'_B)\frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho} \right\} d\mathbf{f}.$$

Далее, выносим почти постоянную величину $\nabla p'_B = -\rho\dot{\mathbf{v}}_B$ из-под знака интеграла, заменив ее значением в точке A:

$$\rho_A\dot{\mathbf{v}}_B(A)\int\limits_{C_A}\left\{\frac{p'_A}{\rho}\,d\mathbf{f} - \mathbf{r}\left(\frac{\nabla p'_A}{\rho}\,d\mathbf{f}\right)\right\}$$

(ρ_A — плотность среды в точке A). Для вычисления этого интеграла замечаем, что вблизи источника жидкость можно считать несжимаемой (см. § 74), и потому для давления внутри малой сферы C_A можно написать согласно (11,1)

$$p'_A = -\rho\dot{\varphi} = \rho\frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{r^3}.$$

В монохроматической волне $\dot{\mathbf{v}} = -i\omega\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{A}} = -i\omega\mathbf{A}$; вводя также единичный вектор $\mathbf{n}_A$ в направлении вектора $\mathbf{A}$ для источника, находящегося в точке A, найдем, что интеграл (3) пропорционален по величине

$$\rho_A\mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A.$$

Аналогично интеграл по сфере C_B будет пропорционален

$$-\rho_B\mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B$$

с тем же коэффициентом пропорциональности. Приравнивая их сумму нулю, найдем искомое соотношение

$$\rho_A\mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A = \rho_B\mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B,$$

выражающее собой принцип взаимности для дипольного звукового излучения.

§ 77. Распространение звука по трубке

Рассмотрим распространение звуковой волны вдоль длинной узкой трубки. Под узкой подразумевается трубка, ширина которой мала по сравнению с длиной волны. Сечение трубки может меняться вдоль ее длины как по форме, так и по площади. Важно только, чтобы это изменение происходило достаточно медленно, — площадь S сечения должна мало меняться на расстояниях порядка ширины трубки.

В этих условиях можно считать, что вдоль каждого поперечного сечения трубки все величины (скорость, плотность и т. п.) постоянны. Направление же распространения волны можно считать везде совпадающим с направлением оси трубки. Уравнение, определяющее распространение такой волны, удобнее всего вывести методом, аналогичным примененному в § 12 для вывода уравнения распространения гравитационных волн в каналах.

В единицу времени через сечение трубки проходит масса $S\rho v$ жидкости. Поэтому количество (масса) жидкости в объеме между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями трубки уменьшается в 1 с на

$$(Sv\rho)_{x+dx}-(Sv\rho)_x=\frac{\partial(Sv\rho)}{\partial x}\,dx$$

(координата x вдоль оси трубки). Поскольку самый объем между обоими сечениями остается неизменным, то это уменьшение может произойти только за счет изменения плотности жидкости. Изменение плотности в единицу времени есть $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, а соответствующее уменьшение массы жидкости в объеме $S\,dx$ между двумя сечениями равно

$$-S\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx.$$

Приравнивая оба выражения, получаем уравнение

$$S\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial(S\rho v)}{\partial x}, \qquad (77,1)$$

представляющее собой уравнение непрерывности для жидкости в трубке.

Далее, напишем уравнение Эйлера, опуская в нем квадратичный по скорости член:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (77,2)$$

Продифференцируем (77,1) по времени; при дифференцировании правой части этого уравнения надо считать ρ не зависящим от времени, так как при дифференцировании ρ возникает член, содержащий $v\frac{\partial\rho}{\partial t}=v\frac{\partial\rho'}{\partial t}$ и потому малый второго порядка. Таким образом,

$$S\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(S\rho\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Подставляем сюда для $\partial v/\partial t$ выражение (77,2), а стоящую слева производную от плотности выражаем через производную от давления согласно $\ddot\rho=\ddot p/c^2$.

В результате получаем следующее уравнение распространения звука в трубке:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0. \qquad (77,3)$$

В монохроматической волне p[1]) зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$, и (77,3) переходит в

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)+k^2p=0 \tag{77,4}$$

($k=\omega/c$ — волновой вектор).

Наконец, остановимся на вопросе об излучении звука из открытого конца трубки. Разность давлений между газом в конце трубки и газом в окружающем трубку пространстве мала по сравнению с разностями давлений внутри трубки. Поэтому в качестве граничного условия на открытом конце трубки надо с достаточной точностью потребовать обращения давления p в нуль. Скорость же газа v у конца трубки при этом оказывается отличной от нуля; пусть v_0 есть ее значение здесь. Произведение Sv_0 есть количество (объем) газа, выходящего в единицу времени из конца трубки.

Мы можем теперь рассматривать открытый конец трубки как некоторый источник газа с производительностью Sv_0. Задача об излучении из трубки делается эквивалентной задаче об излучении пульсирующего тела, определяющемся формулой (74,10). Вместо производной $\dot{V}$ от объема тела по времени мы должны теперь писать величину $S\dot{v}_0$. Таким образом, полная интенсивность излучаемого звука есть

$$I=\frac{\rho S^2\overline{\dot{v}_0^2}}{4\pi c}. \tag{77,5}$$

Задачи

1. Определить коэффициент прохождения звука при переходе его из трубки сечения S_1 в трубку сечения S_2.

Решение. В первой трубке имеем две волны — падающую p_1 и отраженную p_1', а во второй трубке — одна прошедшая волна p_2:

$$p_1=a_1e^{i(kx-\omega t)},\quad p_1'=a_1'e^{-i(kx+\omega t)},\quad p_2=a_2e^{i(kx-\omega t)}.$$

В месте соединения трубок ($x=0$) должны быть равными давления и количества Sv газа, переходящие из одной трубки в другую. Эти условия дают

$$a_1+a_1'=a_2,\quad S_1(a_1-a_1')=S_2a_2,$$

откуда

$$a_2=a_1\frac{2S_1}{S_1+S_2}.$$

Отношение D потока энергии в прошедшей волне к потоку энергии в падающей волне равно

$$D=\frac{S_2\overline{|v_2|^2}}{S_1\overline{|v_1|^2}}=\frac{4S_1S_2}{(S_1+S_2)^2}=1-\left(\frac{S_2-S_1}{S_2+S_1}\right)^2.$$

[1]) Здесь и в задачах к этому параграфу под p подразумевается везде переменная часть давления (которую мы раньше обозначали посредством p').

2. Определить количество энергии, излучаемой из открытого конца цилиндрической трубки.

Решение. В граничном условии $p = 0$ на открытом конце трубки можно приближенно пренебречь излучаемой волной (мы увидим, что интенсивность излучения из конца трубки мала). Тогда имеем условие $p_1 = -p_1'$, где p_1 и p_1' — давления в падающей волне и в волне, отраженной обратно в трубку; для скоростей будем соответственно иметь $v_1 = v_1'$, так что суммарная скорость на выходе из трубки есть $v_0 = v_1 + v_1' = 2v_1$. Поток энергии в падающей волне равен $cS\rho\overline{v_1^2} = {}^1/_4 cS\rho\overline{v_0^2}$. С помощью (77,5) получаем для отношения излучаемой энергии к потоку в падающей волне

$$D = \frac{S\omega^2}{\pi c^2}.$$

Для трубки кругового сечения (радиуса R) имеем $D = R^2\omega^2/c^2$. Поскольку по предположению $R \ll c/\omega$, то $D \ll 1$.

3. Одно из отверстий цилиндрической трубки закрыто излучающей звук мембраной, совершающей заданное колебательное движение; другой конец трубки открыт. Определить излучение звука из трубки.

Решение. В общем решении

$$p = \left(ae^{ikx} + be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

определяем постоянные a и b из условий $v = u$ ($u = u_0e^{-i\omega t}$ — заданная скорость колебаний мембраны) на закрытом конце трубки ($x = 0$) и условия $p = 0$ на открытом конце ($x = l$). Эти условия дают

$$ae^{ikl} + be^{-ikl} = 0 \quad a - b = c\rho u_0.$$

Определяя a и b, находим для скорости газа на открытом конце трубки величину $v_0 = u/\cos kl$. Если бы трубки не было, то интенсивность излучения колеблющейся мембраной определялась бы средним квадратом $S^2\overline{|\dot{u}|^2} = S^2\omega^2\overline{|u|^2}$ согласно формуле (74,10) с Su вместо $\dot{V}$; S — площадь поверхности мембраны. Излучение же из конца трубки пропорционально $S^2\overline{|v_0|^2}\,\omega^2$. Коэффициент усиления звука трубкой есть

$$A = \frac{S^2\overline{|v_0|^2}}{S^2\overline{|u|^2}} = \frac{1}{\cos^2 kl}.$$

Он обращается в бесконечность при частотах колебаний мембраны, равных собственным частотам трубки (резонанс); в действительности, конечно, он все же остается конечным благодаря наличию эффектов, которыми мы пренебрегли (например, трения, влияния излучения звука).

4. То же для конической трубки (мембрана закрывает меньшее из отверстий трубки).

Решение. Для сечения трубки имеем $S = S_0x^2$, меньшему и большему отверстиям трубки пусть соответствуют значения x_1 и x_2 координаты x, так что длина трубки есть $l = x_2 - x_1$. Общее решение уравнения (77,4) есть

$$p = \frac{1}{x}\left(ae^{ikx} + be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t};$$

a и b определяются из условий $v = u$ при $x = x_1$ и $p = 0$ при $x = x_2$. Для коэффициента усиления получаем:

$$A = \frac{S_0^2x_2^4\overline{|v_2|^2}}{S_0^2x_1^4\overline{|u|^2}} = \frac{k^2x_2^2}{(\sin kl + kx_1\cos kl)^2}.$$

5. То же для трубки, сечение которой меняется вдоль ее длины по экспоненциальному закону $S = S_0 e^{\alpha x}$.

Решение. Уравнение (77,4) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0,$$

откуда

$$p = e^{-\alpha x/2}\left(ae^{imx} + be^{-imx}\right) e^{-i\omega t}, \quad m = \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Определяя a и b из условий $v = u$ при $x = 0$ и $p = 0$ при $x = l$, находим для коэффициента усиления

$$A = \frac{S_0^2 e^{2\alpha l}\,\overline{|v_0|^2}}{S_0^2\,\overline{|u|^2}} = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\sin ml}{m} + \cos ml\right)^2}$$

при $k > \alpha/2$ и

$$A = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\operatorname{sh} m'l}{m'} + \operatorname{ch} m'l\right)^2}, \quad m' = \left(\frac{\alpha^2}{4} - k^2\right)^{1/2}$$

при $k < \alpha/2$.

§ 78. Рассеяние звука

Если на пути распространения звуковой волны находится какое-либо тело, то происходит, как говорят, рассеяние звука: наряду с падающей волной появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от рассеивающего тела. Рассеяние звуковой волны происходит уже благодаря самому факту наличия тела на ее пути. Кроме того, под влиянием падающей волны само тело приходит в движение; это движение в свою очередь обусловливает некоторое дополнительное излучение звука телом, т. е. некоторое дополнительное рассеяние. Однако, если плотность тела велика по сравнению с плотностью среды, в которой происходит распространение звука, а его сжимаемость мала, то рассеяние, связанное с движением тела, представляет собой лишь малую поправку к основному рассеянию, обусловленному самим наличием тела. Этой поправкой мы будем в дальнейшем пренебрегать и потому будем считать рассеивающее тело неподвижным.

Будем предполагать, что длина волны звука λ велика по сравнению с размерами l тела; тогда для вычисления рассеянной волны можно воспользоваться формулами (74,8) и (74,11)[1]. Рассеянную волну мы при этом рассматриваем как волну, излучаемую телом; разница заключается только в том, что вместо

[1]) В то же время требуется, чтобы размеры тела были велики по сравнению с амплитудой смещений частиц жидкости в волне; в противном случае движение жидкости не будет, вообще говоря, потенциальным.