5. То же для трубки, сечение которой меняется вдоль ее длины по экспоненциальному закону $S = S_0 e^{\alpha x}$.

Решение. Уравнение (77,4) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0,$$

откуда

$$p = e^{-\alpha x/2}\left(a e^{imx} + b e^{-imx}\right) e^{-i\omega t}, \quad m = \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Определяя a и b из условий $v = u$ при $x = 0$ и $p = 0$ при $x = l$, находим для коэффициента усиления

$$A = \frac{S_0^2 e^{2\alpha l}\overline{|v_0|^2}}{S_0^2 \overline{|u|^2}} = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\sin ml}{m} + \cos ml\right)^2}$$

при $k > \alpha/2$ и

$$A = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\operatorname{sh} m'l}{m'} + \operatorname{ch} m'l\right)^2}, \quad m' = \left(\frac{\alpha^2}{4} - k^2\right)^{1/2}$$

при $k < \alpha/2$.

§ 78. Рассеяние звука

Если на пути распространения звуковой волны находится какое-либо тело, то происходит, как говорят, рассеяние звука: наряду с падающей волной появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от рассеивающего тела. Рассеяние звуковой волны происходит уже благодаря самому факту наличия тела на ее пути. Кроме того, под влиянием падающей волны само тело приходит в движение; это движение в свою очередь обусловливает некоторое дополнительное излучение звука телом, т. е. некоторое дополнительное рассеяние. Однако, если плотность тела велика по сравнению с плотностью среды, в которой происходит распространение звука, а его сжимаемость мала, то рассеяние, связанное с движением тела, представляет собой лишь малую поправку к основному рассеянию, обусловленному самим наличием тела. Этой поправкой мы будем в дальнейшем пренебрегать и потому будем считать рассеивающее тело неподвижным.

Будем предполагать, что длина волны звука λ велика по сравнению с размерами l тела; тогда для вычисления рассеянной волны можно воспользоваться формулами (74,8) и (74,11)[1]. Рассеянную волну мы при этом рассматриваем как волну, излучаемую телом; разница заключается только в том, что вместо

[1]) В то же время требуется, чтобы размеры тела были велики по сравнению с амплитудой смещений частиц жидкости в волне; в противном случае движение жидкости не будет, вообще говоря, потенциальным.

движения тела в жидкости мы имеем теперь дело с движением жидкости относительно тела. Обе задачи, очевидно, эквивалентны.

Для потенциала излучаемой волны мы получили выражение

$$\varphi = -\frac{\dot{V}}{4\pi r} - \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{cr^2}.$$

В этой формуле V было объемом тела. Теперь же объем самого тела остается неизменным, и под $\dot{V}$ надо подразумевать не скорость изменения объема тела, а то количество (объем) жидкости, которое вошло бы в единицу времени в объем, занимаемый телом (этот объем обозначим посредством V_0), если бы этого тела вообще не было. Действительно, при наличии тела это количество жидкости не проникает внутрь занимаемого телом объема, что эквивалентно выбрасыванию этого же количества из объема V_0. Коэффициент же при $1/4\pi r$ в первом члене в φ должен быть, как мы видели в предыдущем параграфе, равен как раз количеству «выбрасываемой» в 1 сек. из начала координат жидкости. Это количество легко вычислить. Изменение массы жидкости в единицу времени в объеме, равном объему тела, равно $V_0\dot{\rho}$, где функция ρ определяет изменение со временем плотности жидкости в падающей звуковой волне (поскольку длина волны велика по сравнению с размерами тела, то на протяжении расстояний порядка этих размеров плотность ρ можно считать постоянной; поэтому мы можем писать изменение массы жидкости в объеме V_0 просто в виде $V_0\dot{\rho}$, где $\dot{\rho}$ одинаково вдоль всего объема V_0). Изменение объема жидкости, соответствующее изменению массы $\dot{\rho}V_0$, есть, очевидно, $V_0\dot{\rho}/\rho$. Таким образом, вместо $\dot{V}$ надо писать в выражении для φ величину $V_0\dot{\rho}/\rho$. В падающей плоской волне переменная часть плотности ρ' связана со скоростью посредством $\rho' = \rho v/c$; поэтому $\dot{\rho} = \dot{\rho}' = \rho\dot{v}/c$, и вместо $V_0\dot{\rho}/\rho$ можно писать $V_0\dot{v}/c$.

Что касается вектора $\mathbf{A}$, то при движении тела в жидкости он определяется формулами (11,5—6):

$$4\pi\rho A_i = m_{ik}u_k + \rho V_0 u_i.$$

Теперь же мы должны писать вместо скорости $\mathbf{u}$ тела взятую с обратным знаком скорость $\mathbf{v}$ жидкости в падающей волне (которую она имела бы в месте нахождения тела, если бы тела вовсе не было). Таким образом,

$$A_i = -\frac{1}{4\pi\rho} m_{ik}v_k - \frac{V_0}{4\pi} v_i. \qquad (78,1)$$

Окончательно получаем для потенциала рассеянной волны

$$\varphi_p = -\frac{V_0\dot{v}}{4\pi cr} - \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{cr^2} \qquad (78,2)$$

с вектором **A**, определяющимся формулой (78,1). Для распределения скоростей в рассеянной волне получаем отсюда:

$$\mathbf{v}_p = \frac{V_0 \dot{v} \mathbf{n}}{4\pi r c^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}})}{r c^2} \qquad (78,3)$$

(см. § 74; **n** — единичный вектор в направлении рассеяния).

Среднее количество рассеиваемой (в 1 с.) в данном элементе do телесного угла энергии определяется потоком энергии, равным $c\rho\overline{\mathbf{v}_p^2}\,do$. Полная интенсивность I_p рассеяния получается интегрированием этого выражения по всем направлениям. При этом интегрировании удвоенное произведение обоих членов в (78,3), пропорциональное первой степени косинуса угла между направлением рассеяния и направлением распространения падающей волны, исчезает и остается (ср. (74,10) и (74,13)):

$$I_p = \frac{V_0^2 \rho}{4\pi c^3}\overline{\dot{v}^2} + \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\dddot{\mathbf{A}}^2}. \qquad (78,4)$$

Рассеяние принято характеризовать его *эффективным сечением* (или просто *сечением*) $d\sigma$. Оно определяется как отношение средней (по времени) рассеиваемой в данном элементе телесного угла энергии к средней плотности потока энергии в падающей волне. Полное сечение σ равно интегралу от $d\sigma$ по всем направлениям рассеяния, т. е. равно отношению полной интенсивности рассеяния к плотности падающего потока энергии. Сечение имеет, очевидно, размерность площади.

Средняя плотность потока энергии в падающей волне есть $c\rho\overline{\mathbf{v}^2}$. Поэтому дифференциальное сечение рассеяния равно отношению

$$d\sigma = \frac{\overline{\mathbf{v}_p^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}} r^2\,do. \qquad (78,5)$$

Полное сечение равно

$$\sigma = \frac{V_0^2}{4\pi c^4}\frac{\overline{\ddot{\mathbf{v}}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}} + \frac{4\pi}{3c^4}\frac{\overline{\dddot{\mathbf{A}}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}}. \qquad (78,6)$$

Для монохроматической падающей волны среднее значение квадрата второй производной от скорости по времени пропорционально четвертой степени частоты. Таким образом, сечение рассеяния звука телом, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, пропорционально четвертой степени частоты.

Наконец, остановимся коротко на обратном предельном случае, когда длина волны рассеиваемого звука мала по сравнению с размерами тела. В этом случае все рассеяние, за исключением лишь рассеяния на очень малые углы, сводится к простому отражению от поверхности тела. Соответствующая часть полного сечения рассеяния равна, очевидно, просто площади S сечения тела плоскостью, перпендикулярной к направлению падающей волны. Рассеяние же на малые углы (углы порядка λ/l) представляет собой дифракцию от краев тела. Мы не станем излагать здесь теорию этого явления, полностью аналогичную теории дифракции света (см. II §§ 60, 61). Укажем лишь, что согласно принципу Бабине полная интенсивность дифрагировавшего звука равна полной интенсивности отраженного звука. Поэтому дифракционная часть сечения рассеяния равна той же площади S, а полное сечение равно, следовательно, $2S$.

Задачи

1. Определить сечение рассеяния плоской звуковой волны твердым шариком, радиус R которого мал по сравнению с длиной волны.

Решение. Для скорости в плоской волне имеем $v = a\cos\omega t$ (в данной точке пространства). Вектор $\mathbf{A}$ равен в случае шара (см. задачу 1 § 11) $\mathbf{A} = -\mathbf{v}R^3/2$. Для дифференциального сечения получаем:

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4}\left(1 - \frac{3\cos\theta}{2}\right)^2 do$$

(θ — угол между направлением падающей волны и направлением рассеяния). Интенсивность рассеяния максимальна в направлении $\theta = \pi$, противоположном направлению падения. Полное сечение равно

$$\sigma = \frac{7\pi}{9}\left(\frac{R^3\omega^2}{c^2}\right)^2. \qquad (1)$$

Здесь (а также ниже в задачах 3, 4) предполагается, что плотность ρ_0 шарика велика по сравнению с плотностью ρ газа; в противном случае надо учитывать увлечение шарика действующими на него со стороны колеблющегося газа силами давления.

2. Определить сечение рассеяния звука жидкой каплей с учетом сжимаемости жидкости и движения капли под влиянием падающей волны.

Решение. При адиабатическом изменении давления газа, в котором находится капля, на величину p' объем капли уменьшается на

$$\frac{V_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial p}\right)_s p' = \frac{V_0}{\rho_0 c_0^2}c\rho v$$

(ρ — плотность газа, ρ_0 — плотность жидкости в капле, c_0 — скорость звука в жидкости). В выражениях (78,2—3) надо писать теперь вместо $V_0\dot{v}/c$ разность

$$V_0\left(\dot{v}/c - \dot{v}c\rho/c_0^2\rho_0\right).$$

Далее, в выражении для $\mathbf{A}$ надо писать теперь вместо $-\mathbf{v}$ разность $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}$ — скорость тела, приобретаемая им под влиянием падающей волны. Для шара получаем с помощью результатов задачи 1 § 11

$$\mathbf{A} = R^3\mathbf{v}\frac{\rho - \rho_0}{2\rho_0 + \rho}.$$

Подстановка этих выражений приводит к сечению

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4}\left\{\left(1 - \frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right) - 3\cos\theta\frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0 + \rho}\right\}^2 do.$$

Полное сечение равно

$$\sigma = \frac{4\pi\omega^4 R^6}{9c^4}\left\{\left(1-\frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right)^2+\frac{3(\rho_0-\rho)^2}{(2\rho_0+\rho)^2}\right\}.$$

3. Определить сечение рассеяния звука твердым шариком, радиус R которого мал по сравнению с $\sqrt{\nu/\omega}$. Теплоемкость шарика предполагается настолько большой, что его температуру можно считать неизменной.

Решение. В этом случае должно быть учтено влияние вязкости газа на движение шарика, и вектор $\mathbf{A}$ должен быть видоизменен указанным в задаче 2 § 74 образом; при $R\sqrt{\omega/\nu} \ll 1$ имеем:

$$\mathbf{A} = -i\,\frac{3R\nu}{2\omega}\,\mathbf{v}.$$

Кроме того, к рассеянию того же порядка величины приводит теплопроводность газа. Пусть $T_0' e^{-i\omega t}$ — колебания температуры в заданной точке звуковой волны. Распределение температуры вблизи шарика будет (ср. задачу 2 § 52):

$$T' = T_0' e^{-i\omega t}\left\{1-\frac{R}{r}\exp\left[-(1-i)(r-R)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right]\right\}$$

(при $r = R$ должно быть $T' = 0$). Количество тепла, передаваемое в единицу времени от газа к шарику, есть (при $R\sqrt{\omega/\chi} \ll 1$):

$$q = 4\pi R^2 \varkappa \left.\frac{dT'}{dr}\right|_{r=R} = 4\pi R \varkappa T_0' e^{-i\omega t}.$$

Передача этого тепла приводит к изменению объема газа, которое можно воспринимать в смысле его влияния на рассеяние как соответствующее эффективное изменение объема шарика, равное

$$\dot V = -4\pi R\chi\beta T_0' e^{-i\omega t} = -\frac{4\pi R}{c}\,\chi(\gamma-1)\,v,$$

где β — коэффициент теплового расширения газа, а $\gamma = c_p/c_v$; мы воспользовались также формулами (64,13) и (79,2).

Учитывая оба эффекта, получим дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{\omega^2 R^2}{c^4}\left[\chi(\gamma-1)-\frac{3}{2}\nu\cos\theta\right]^2 do.$$

Полное эффективное сечение:

$$\sigma = \frac{4\pi\omega^2 R^2}{c^4}\left[\chi^2(\gamma-1)^2+\frac{3}{4}\nu^2\right].$$

Эти формулы применимы лишь постольку, поскольку стоксова сила трения мала по сравнению с инерционными силами, т. е. $\eta R \ll M\omega$, где $M = 4\pi R^3\rho_0/3$ — масса шарика; в противном случае становится существенным увлечение шарика вязкими силами.

4. Определить среднюю силу, действующую на твердый шарик, рассеивающий плоскую звуковую волну ($\lambda \gg R$).

Решение. Передаваемый в единицу времени от падающей волны шарику импульс, т. е. искомая сила, равен разности импульса, приносимого рассеиваемой волной, и полного потока импульса в рассеянной волне. Из падающей волны рассеивается поток энергии, равный $\sigma c \bar E_0$, где E_0 — плотность энергии в падающей волне; соответствующий поток импульса получается делением на c, т. е. равен $\sigma\overline{E}_0$. В рассеянной волне поток импульса в телесном угле do равен $\overline{E}_p r^2 do = \overline{E}_0 d\sigma$; проектируя его на направление распространения падающей волны (очевидно, что искомая сила имеет это направление) и интегрируя по всем углам, получим $\overline{E}_0 \int \cos\theta \, d\sigma$. Таким образом, действующая на шарик сила равна

$$F = \overline{E}_0 \int (1 - \cos\theta) \, d\sigma.$$

Подставляя сюда $d\sigma$ из задачи 1, получим:

$$F = \overline{E}_0 \frac{11\pi\omega^4 R^6}{9c^4}.$$

§ 79. Поглощение звука

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн, в связи с чем звук поглощается, т. е. его интенсивность постепенно уменьшается. Для вычисления диссипируемой в единицу времени энергии $\dot{E}_{\text{мех}}$ воспользуемся следующими общими соображениями. Механическая энергия представляет собой не что иное, как максимальную работу, которую можно получить при переходе из данного неравновесного состояния в состояние термодинамического равновесия. Как известно из термодинамики, максимальная работа совершается, если переход происходит обратимым образом (т. е. без изменения энтропии), и равна соответственно этому

$$E_{\text{мех}} = E_0 - E(S),$$

где E_0 есть заданное начальное значение энергии тела в исходном состоянии, а $E(S)$ — энергия тела в состоянии равновесия с той же энтропией S, которую тело имело вначале. Дифференцируя по времени, получаем:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\dot{E}(S) = -\frac{\partial E}{\partial S}\dot{S}.$$

Производная от энергии по энтропии есть температура. Поэтому $\frac{\partial E}{\partial S}$ — температура, которую имело бы тело, если бы оно находилось в состоянии термодинамического равновесия (с заданным значением энтропии). Обозначая эту температуру как T_0, имеем, следовательно:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -T_0\dot{S}.$$

Воспользуемся для $\dot{S}$ выражением (49,6), включающим в себя возрастание энтропии, обусловленное как теплопроводностью, так и вязкостью. Поскольку температура T мало меняется вдоль жидкости и мало отличается от T_0, то можно вынести ее из-под