энергии в падающей волне; соответствующий поток импульса получается делением на c, т. е. равен $\sigma\overline{E}_0$. В рассеянной волне поток импульса в телесном угле do равен $\overline{E}_p r^2 do = \overline{E}_0 d\sigma$; проектируя его на направление распространения падающей волны (очевидно, что искомая сила имеет это направление) и интегрируя по всем углам, получим $\overline{E}_0 \int \cos\theta \, d\sigma$. Таким образом, действующая на шарик сила равна

$$F = \overline{E}_0 \int (1 - \cos\theta)\, d\sigma.$$

Подставляя сюда $d\sigma$ из задачи 1, получим:

$$F = \overline{E}_0 \frac{11\pi\omega^4 R^6}{9c^4}.$$

§ 79. Поглощение звука

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн, в связи с чем звук поглощается, т. е. его интенсивность постепенно уменьшается. Для вычисления диссипируемой в единицу времени энергии $\dot{E}_{\text{мех}}$ воспользуемся следующими общими соображениями. Механическая энергия представляет собой не что иное, как максимальную работу, которую можно получить при переходе из данного неравновесного состояния в состояние термодинамического равновесия. Как известно из термодинамики, максимальная работа совершается, если переход происходит обратимым образом (т. е. без изменения энтропии), и равна соответственно этому

$$E_{\text{мех}} = E_0 - E(S),$$

где E_0 есть заданное начальное значение энергии тела в исходном состоянии, а $E(S)$ — энергия тела в состоянии равновесия с той же энтропией S, которую тело имело вначале. Дифференцируя по времени, получаем:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\dot{E}(S) = -\frac{\partial E}{\partial S}\dot{S}.$$

Производная от энергии по энтропии есть температура. Поэтому $\frac{\partial E}{\partial S}$ — температура, которую имело бы тело, если бы оно находилось в состоянии термодинамического равновесия (с заданным значением энтропии). Обозначая эту температуру как T_0, имеем, следовательно:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -T_0\dot{S}.$$

Воспользуемся для $\dot{S}$ выражением (49,6), включающим в себя возрастание энтропии, обусловленное как теплопроводностью, так и вязкостью. Поскольку температура T мало меняется вдоль жидкости и мало отличается от T_0, то можно вынести ее из-под знака интеграла и писать T вместо T_0:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\varkappa}{T}\int (\nabla T)^2\,dV - \frac{\eta}{2}\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV - \zeta\int(\operatorname{div}\mathbf{v})^2\,dV. \quad (79,1)$$

Эта формула представляет собой обобщение формулы (16,3) на случай сжимаемой жидкости и наличия теплопроводности.

Пусть ось x совпадает с направлением распространения звуковой волны. Тогда

$$v_x = v_0\cos(kx-\omega t), \quad v_y = v_z = 0.$$

Два последних члена в (79,1) дают

$$-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\int\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV = -k^2\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)v_0^2\int\sin^2(kx-\omega t)\,dV.$$

Нас, конечно, интересует среднее по времени значение величин; усреднение дает

$$-k^2\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\frac{1}{2}v_0^2V_0$$

(V_0 — объем жидкости).

Далее, вычислим первый член в (79,1). Отклонение T' температуры в звуковой волне от своего равновесного значения связано со скоростью формулой (64,13), так что градиент температуры равен

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \beta\frac{cT}{c_p}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\beta cT}{c_p}v_0k\sin(kx-\omega t).$$

Для среднего по времени значения от первого члена в (79,1) получаем:

$$-\frac{\varkappa c^2T\beta^2}{2c_p^2}v_0^2k^2V_0.$$

С помощью известных термодинамических формул

$$c_p - c_v = T\beta^2\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = T\beta^2\frac{c_v}{c_p}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s = T\beta^2c^2\frac{c_v}{c_p} \quad (79,2)$$

можно переписать это выражение в виде

$$-\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)k^2v_0^2V_0.$$

Собирая полученные выражения, находим среднее значение диссипации энергии в виде

$$\bar{\dot{E}}_{\text{мех}} = -\frac{k^2v_0^2V_0}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)+\varkappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right]. \quad (79,3)$$

Полная же энергия звуковой волны равна

$$\overline{E} = \frac{\rho v_0^2}{2} V_0. \tag{79,4}$$

Введенный в § 25 коэффициент затухания волны определяет закон уменьшения интенсивности со временем. Для звука, однако, обычно приходится иметь дело с несколько иной постановкой задачи, в которой звуковая волна распространяется вдоль жидкости и ее интенсивность падает с увеличением пройденного расстояния x. Очевидно, что это уменьшение будет происходить по закону $e^{-2\gamma x}$, а для амплитуды — как $e^{-\gamma x}$, где коэффициент поглощения γ определяется посредством

$$\gamma = \frac{|\overline{\dot{E}_{\text{мех}}}|}{2c\overline{E}}. \tag{79,5}$$

Подставляя сюда (79,3) и (79,4), находим, таким образом, следующее выражение для коэффициента поглощения звука:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right] \equiv a\omega^2. \tag{79,6}$$

Отметим, что он пропорционален квадрату частоты звука[1]).

Эта формула применима постольку, поскольку определяемый ею коэффициент поглощения мал: должно быть мало относительное убывание амплитуды на расстояниях порядка длины волны (т. е. должно быть $\gamma c/\omega \ll 1$). На этом предположении по существу основан изложенный вывод, так как мы вычисляли диссипацию энергии с помощью незатухающего выражения для звуковой волны. Для газов это условие фактически всегда выполнено. Рассмотрим, например, первый член в (79,6). Условие $\gamma c/\omega \ll 1$ означает, что должно быть $\nu\omega/c^2 \ll 1$. Но, как известно из кинетической теории газов, коэффициент вязкости ν газа — порядка величины произведения длины свободного пробега l на среднюю тепловую скорость молекул; последняя совпадает по порядку величины со скоростью звука в газе, так что $\nu \sim lc$. Поэтому имеем:

$$\frac{\nu\omega}{c^2} \sim \frac{l\omega}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1, \tag{79,7}$$

так как заведомо $l \ll \lambda$. Член с теплопроводностью в (79,6) дает то же самое, поскольку $\chi \sim \nu$.

[1]) Специфический механизм поглощения должен иметь место при распространении звука в двухфазной среде — эмульсии (*М. А. Исакович*, 1948). Ввиду различия в термодинамических свойствах компонент эмульсии изменения их температуры при прохождении звуковой волны будут, вообще говоря, различны. Возникающий при этом между ними теплообмен приведет к дополнительному поглощению звука. Вследствии сравнительной медленности этого теплообмена уже сравнительно рано возникает и существенная дисперсия звука.

Что же касается жидкостей, то и здесь условие малости поглощения выполняется всегда, когда вообще имеет смысл задача о поглощении звука в той постановке, о которой здесь шла речь. Поглощение (на длине волны) может стать большим, лишь если силы вязких напряжений сравнимы с силами давления, возникающими при сжатии вещества. Но в таких условиях становится неприменимым уже самое уравнение Навье — Стокса (с не зависящими от частоты коэффициентами вязкости) и возникает существенная, связанная с процессами внутреннего трения дисперсия звука[1]).

При поглощении звука соотношение между волновым вектором и частотой можно, очевидно, написать в виде

$$k = \frac{\omega}{c} + ia\omega^2 \tag{79,8}$$

(где a — коэффициент в (79,6)). Легко сообразить соответственно этому, каким образом надо видоизменить уравнение бегущей звуковой волны для того, чтобы учесть в нем эффект поглощения. Для этого замечаем, что в отсутствии поглощения дифференциальное уравнение для, скажем, давления $p' = p'(x - ct)$ можно написать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t}.$$

Уравнение же, решением которого была бы функция $e^{i(kx-\omega t)}$ с k из (79,8), надо, очевидно, написать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t} + a\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \tag{79,9}$$

Если ввести вместо t переменную $\tau = t - x/c$, то это уравнение перейдет в

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = a\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2},$$

т. е. уравнение типа одномерного уравнения теплопроводности.

Общее решение этого уравнения можно написать в виде (см. § 51)

$$p'(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}}\int p_0'(\tau')\exp\left\{-\frac{(\tau'-\tau)^2}{4ax}\right\}d\tau' \tag{79,10}$$

(где $p_0'(\tau) = p'(0, \tau)$). Если волна излучалась в течение ограниченного промежутка времени, то на достаточно больших

[1]) Особый случай, когда возможно сильное поглощение звука, которое может быть рассмотрено обычными методами, — газ с аномально большой (по сравнению с его вязкостью) теплопроводностью, связанной с посторонними причинами, например, с лучистой теплопроводностью при очень высоких температурах (ср. задачу 3 этого параграфа).

расстояниях от источника это выражение переходит в

$$p'(x,\ \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}} e^{-\tau^2/4ax} \int p_0'(\tau')\, d\tau'. \qquad (79,11)$$

Другими словами, на больших расстояниях профиль волны определяется гауссовой кривой. Его ширина $\sim (ax)^{1/2}$, т. е. растет пропорционально корню из пройденного волной расстояния, амплитуда же волны надает как $x^{-1/2}$. Отсюда легко заключить, что полная энергия волны падает по тому же закону $x^{-1/2}$.

Легко вывести аналогичные формулы для шаровых волн. При этом надо учитывать, что для такой волны $\int p'\, dt = 0$ (см. (70,8)). Вместо (79,11) получим теперь

$$p'(r,\ \tau) = \mathrm{const}\, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{e^{-\tau^2/4ar}}{r^{1/2}}$$

или

$$p'(r,\ \tau) = \mathrm{const}\, \frac{\tau}{r^{5/2}} e^{-\tau^2/4ar}. \qquad (79,12)$$

Сильное поглощение должно происходить при отражении звуковой волны от твердой стенки. Причина этого явления состоит в следующем (*K. F. Herzfeld*, 1938; *Б. П. Константинов*, 1939).

В звуковой волне наряду с плотностью и давлением испытывает периодические колебания около своего среднего значения также и температура. Поэтому вблизи твердой стенки имеется периодически меняющаяся по величине разность температур между жидкостью и стенкой, даже если средняя температура жидкости равна температуре стенки. Между тем на самой поверхности температуры соприкасающихся жидкости и стенки должны быть одинаковыми. В результате в тонком пристеночном слое жидкости возникает большой градиент температуры; температура быстро меняется от своего значения в звуковой волне до температуры стенки. Наличие же больших градиентов температуры приводит к большой диссипации энергии путем теплопроводности. По аналогичной причине к большому поглощению звука приводит при наклонном падении волны также и вязкость жидкости. При таком падении скорость жидкости в волне (по направлению распространения волны) имеет отличную от нуля компоненту, касательную к поверхности стенки. Между тем на самой поверхности жидкость должна полностью «прилипать» к стенке. Поэтому в пристеночном слое жидкости возникает большой градиент касательной составляющей скорости[1]), что и приводит к большой вязкой диссипации энергии (см. задачу 1).

[1]) Что касается нормальной составляющей скорости, то на стенке она равна нулю уже в силу граничных условий для идеальной жидкости.

Задачи

1. Определить долю энергии, поглощаемой при отражении звуковой волны от твердой стенки. Плотность вещества стенки предполагается настолько большой, что звук практически не проникает в него, а теплоемкость — настолько большой, что температуру стенки можно считать постоянной.

Решение. Выбираем плоскость стенки в качестве плоскости $x = 0$, а плоскость падения в качестве плоскости x, y. Угол падения (равный углу отражения) есть θ. Изменение плотности в падающей волне в некоторой точке на поверхности (скажем, в точке $x = y = 0$) есть $\rho_1' = Ae^{-i\omega t}$. Отраженная волна имеет ту же амплитуду, так что у стенки в ней $\rho_2' = \rho_1'$. Реальное изменение плотности жидкости, в которой распространяются одновременно обе волны (падающая и отраженная), есть $\rho' = 2Ae^{-i\omega t}$. Скорость жидкости в волне определяется согласно

$$\mathbf{v}_1 = \frac{c}{\rho}\rho_1'\mathbf{n}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{c}{\rho}\rho_2'\mathbf{n}_2.$$

Полная скорость на стенке $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ есть поэтому

$$v = v_y = 2A\sin\theta\frac{c}{\rho}e^{-i\omega t}$$

(вернее, это есть то значение скорости, которое она имеет без учета верных граничных условий на поверхности стенки при наличии вязкости). Истинный ход скорости v_y вблизи стенки определяется формулой (24,13), а связанная с вязкостью диссипация энергии — формулой (24,14), в которые надо вместо $v_0e^{-i\omega t}$ подставить полученное выше выражение для v.

Отклонение T' температуры от своего среднего значения (равного температуре стенки) без учета правильных граничных условий на стенке получилось бы равным (см. (64,13))

$$T' = 2A\frac{c^2T\beta}{c_p\rho}e^{-i\omega t}.$$

В действительности же распределение температуры определяется уравнением теплопроводности с граничным условием $T' = 0$ при $x = 0$ и соответственно этому изображается формулой, в точности аналогичной (24,13).

Вычисляя связанную с теплопроводностью диссипацию энергии согласно первому члену формулы (79,1), получим в результате для полной диссипации энергии, отнесенной к единице площади поверхности стенки:

$$\bar{\dot{E}}_{\text{мех}} = -\frac{A^2c^2\sqrt{2\omega}}{\rho}\left[\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)+\sin^2\theta\sqrt{\nu}\right].$$

Средняя плотность потока энергии, падающего на единицу поверхности стенки с падающей волной, равна

$$c\rho\overline{v_1^2}\cos\theta = \frac{c^3A^2}{2\rho}\cos\theta.$$

Поэтому доля энергии, поглощающейся при отражении, есть

$$2\frac{\sqrt{2\omega}}{c\cos\theta}\left[\sin^2\theta\sqrt{\nu}+\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\sqrt{\chi}\right].$$

Это выражение справедливо лишь до тех пор, пока оно мало (при выводе мы считали амплитуды падающей и отраженной волн одинаковыми). Это условие означает, что угол падения θ не должен быть слишком близким к $\pi/2$.

2. Определить коэффициент поглощения звука, распространяющегося по цилиндрической трубе.

Решение. Основная доля поглощения обусловлена эффектом, происходящим от наличия стенок. Коэффициент поглощения γ равен энергии, диссипируемой в единицу времени на поверхности стенок единицы длины трубы, деленной на удвоенный полный поток энергии через поперечное сечение трубы. Вычисление, аналогичное произведенному в задаче 1, приводит к результату (R — радиус трубы):

$$\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}\,Rc}\left[\sqrt{\nu} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\sqrt{\chi}\right].$$

3. Найти закон дисперсии для звука, распространяющегося в среде с очень большой теплопроводностью.

Решение. При наличии большой теплопроводности движение в звуковой волне не адиабатично. Поэтому вместо условия постоянства энтропии имеем теперь уравнение

$$\dot{s}' = \frac{\varkappa}{\rho T}\Delta T' \qquad (1)$$

(линеаризованное уравнение (49,4) без вязких членов). В качестве второго уравнения берем

$$\ddot{\rho}' = \Delta p', \qquad (2)$$

получающееся путем исключения $\mathbf{v}$ из уравнений (64,2—3). Выбирая в качестве основных переменных p' и T', пишем ρ' и s' в виде

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T p', \qquad s' = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T p'.$$

Эти выражения подставляем в (1) и (2), после чего ищем T', p' в виде, пропорциональном $e^{i(kx-\omega t)}$. Условие совместимости получающихся таким образом двух уравнений для p' и T' можно привести (путем использования ряда известных соотношений между производными от термодинамических величин) к виду

$$k^4 - k^2\left(\frac{\omega^2}{c_T^2} + \frac{i\omega}{\chi}\right) + \frac{i\omega^3}{\chi c_s^2} = 0, \qquad (3)$$

чем и определяется искомая зависимость k от ω. Здесь введены обозначения

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \qquad c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{c_s^2}{\gamma}$$

(γ — отношение теплоемкостей c_p/c_v).

В предельном случае малых частот ($\omega \ll c^2/\chi$) уравнение (3) дает

$$k = \frac{\omega}{c_s} + i\frac{\omega^2\chi}{2c_s}\left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_s^2}\right),$$

что соответствует распространению звука с обычной «адиабатической» скоростью c_s и малым коэффициентом поглощения, совпадающим со вторым членом в (79,6). Так и должно было быть, поскольку условие $\omega \ll c^2/\chi$ означает, что за время одного периода тепло успевает распространиться лишь на расстояние $\sim\sqrt{\chi/\omega}$ (ср. (51,7)), малое по сравнению с длиной волны c/ω.

В обратном предельном случае больших частот из (3) находим:

$$k = \frac{\omega}{c_T} + i \frac{c_T}{2\chi c_s^2}\left(c_s^2 - c_T^2\right).$$

В этом случае звук распространяется с «изотермической» скоростью c_T (всегда меньшей скорости c_s). Коэффициент же поглощения оказывается снова малым (по сравнению с обратной длиной волны), причем он не зависит от частоты и обратно пропорционален теплопроводности [1]).

4. Определить дополнительное поглощение звука, распространяющегося в смеси двух веществ, связанное с диффузией (*И. Г. Шапошников* и *З. А. Гольдберг*, 1952).

Решение. В смеси имеется дополнительный источник поглощения звука, связанный с тем, что возникающие в звуковой волне градиенты температуры и давления приводят к появлению необратимых процессов термо- и бародиффузии (градиента же массовой концентрации, а с ней и чистой диффузии, очевидно, не возникает). Это поглощение определяется членом

$$\frac{1}{T\rho D}\left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p,\,T}\int \mathbf{i}^2\,dV$$

в скорости изменения энтропии (59,13) (мы обозначим здесь концентрацию посредством C в отличие от скорости звука c). Диффузионный поток

$$\mathbf{i} = -\rho D\left(\frac{k_T}{T}\nabla T + \frac{k_p}{p}\nabla p\right)$$

с k_p из (59,10). Вычисление, аналогичное произведенному в тексте, с использованием ряда соотношений между производными термодинамических величин приводит к следующему результату: к выражению (79,6) для коэффициента поглощения добавляется член

$$\gamma_D = \frac{D\omega^2}{2c\rho^2\left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p,\,T}}\left\{\left(\frac{\partial \rho}{\partial C}\right)_{p,\,T} + \frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,\,C}\left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p,\,T}\right\}^2.$$

5. Определить эффективное сечение поглощения звука шариком, радиус которого мал по сравнению с $\sqrt{\nu/\omega}$.

Решение. Полное поглощение складывается из эффектов вязкости и теплопроводности газа. Первый определяется работой стоксовой силы трения при обтекании шарика движущимся в звуковой волне газом (как и в задаче 3 § 78, предполагается, что шарик не увлекается этой силой). Второй эффект определяется количеством тепла q, передаваемым в единицу времени от газа шарику (задача 3 § 78): диссипация энергии при передаче тепла q

---

[1]) Второй корень квадратного по k^2 уравнения (3) соответствует быстро затухающим с x тепловым волнам. В предельном случае $\omega\chi \ll c^2$ этот корень дает

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\chi}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$$

в согласии с (52,15). В случае же $\omega\chi \gg c^2$ получается

$$k = (1+i)\sqrt{\frac{\omega c_v}{2\chi c_p}}.$$

при разности температур T' между газом (вдали от шарика) и шариком равна qT'/T. Для суммарного эффективного сечения поглощения получается выражение

$$\sigma = \frac{2\pi R}{c}\left[3\nu + 2\chi\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\right].$$

§ 80. Акустическое течение

Одно из самых интересных проявлений влияния вязкости на звуковые волны состоит в возникновении стационарных вихревых течений в стоячем звуковом поле при наличии твердых препятствий или ограничивающих его твердых стенок. Это движение (его называют *акустическим течением*) появляется во втором приближении по амплитуде волны; его характерная особенность состоит в том, что скорость движения в нем (в пространстве вне тонкого пристеночного слоя) оказывается не зависящей от вязкости, — хотя самим своим возникновением оно обязано именно вязкости (*Rayleigh*, 1883).

Свойства акустического течения наиболее типичным образом проявляются в условиях, когда характерная длина задачи (размеры препятствий или области движения) малы по сравнению с длиной звуковой волны λ, но в то же время велики по сравнению с введенной в § 24 глубиной проникновения вязких волн $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$:

$$\lambda \gg l \gg \delta. \tag{80,1}$$

Ввиду последнего условия, в области движения можно выделить узкий *акустический пограничный слой*, в котором происходит падение скорости от ее значения в звуковой волне до нуля на твердой поверхности. Поскольку скорость газа в этом слое (как и в самой звуковой волне) мала по сравнению со скоростью звука, а его характерный размер — толщина δ — мал по сравнению с λ (ср. условие (10,17)), то движение в нем можно рассматривать как несжимаемое.

Рассмотрим акустический пограничный слой у плоской твердой стенки (плоскость xz), причем движение будем считать плоским — в плоскости xy (*H. Schlichting*, 1932). Приближения, связанные с малой толщиной пограничного слоя, описаны в § 39 и сохраняют силу для рассматриваемого нестационарного движения. Нестационарность приводит лишь к появлению в уравнении Прандтля (39,5) членов с производными по времени:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{80,2}$$

(производная dp/dx выражена через скорость $U(x, t)$ течения вне пограничного слоя с помощью уравнения (9,3)). В данном случае

$$U = v_0\cos kx\cdot\cos\omega t = v_0\cos kx\cdot\mathrm{Re}\,e^{-i\omega t} \tag{80,3}$$