при разности температур T' между газом (вдали от шарика) и шариком равна qT'/T. Для суммарного эффективного сечения поглощения получается выражение

$$\sigma = \frac{2\pi R}{c}\left[3\nu + 2\chi\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\right].$$

§ 80. Акустическое течение

Одно из самых интересных проявлений влияния вязкости на звуковые волны состоит в возникновении стационарных вихревых течений в стоячем звуковом поле при наличии твердых препятствий или ограничивающих его твердых стенок. Это движение (его называют *акустическим течением*) появляется во втором приближении по амплитуде волны; его характерная особенность состоит в том, что скорость движения в нем (в пространстве вне тонкого пристеночного слоя) оказывается не зависящей от вязкости, — хотя самим своим возникновением оно обязано именно вязкости (*Rayleigh*, 1883).

Свойства акустического течения наиболее типичным образом проявляются в условиях, когда характерная длина задачи (размеры препятствий или области движения) малы по сравнению с длиной звуковой волны λ, но в то же время велики по сравнению с введенной в § 24 глубиной проникновения вязких волн $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$:

$$\lambda \gg l \gg \delta. \tag{80,1}$$

Ввиду последнего условия, в области движения можно выделить узкий *акустический пограничный слой*, в котором происходит падение скорости от ее значения в звуковой волне до нуля на твердой поверхности. Поскольку скорость газа в этом слое (как и в самой звуковой волне) мала по сравнению со скоростью звука, а его характерный размер — толщина δ — мал по сравнению с λ (ср. условие (10,17)), то движение в нем можно рассматривать как несжимаемое.

Рассмотрим акустический пограничный слой у плоской твердой стенки (плоскость xz), причем движение будем считать плоским — в плоскости xy (*H. Schlichting*, 1932). Приближения, связанные с малой толщиной пограничного слоя, описаны в § 39 и сохраняют силу для рассматриваемого нестационарного движения. Нестационарность приводит лишь к появлению в уравнении Прандтля (39,5) членов с производными по времени:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{80,2}$$

(производная dp/dx выражена через скорость $U(x, t)$ течения вне пограничного слоя с помощью уравнения (9,3)). В данном случае

$$U = v_0 \cos kx \cdot \cos \omega t = v_0 \cos kx \cdot \mathrm{Re}\, e^{-i\omega t} \tag{80,3}$$

($k=\omega/c$), что соответствует стоячей плоской звуковой волне с частотой ω. Искомую скорость $\mathbf{v}$ в пограничном слое выразим через функцию тока $\psi(x, y, t)$ согласно

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

чем автоматически удовлетворяется уравнение непрерывности (39,6).

Будем решать уравнение (80,2) последовательными приближениями по малой величине v_0 — амплитуде колебаний скорости газа в звуковой волне. В первом приближении пренебрегаем квадратичными членами полностью. Решение уравнения

$$\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial y^2}=-i\omega v_0\cos kx\cdot e^{-i\omega t},$$

удовлетворяющее требуемым условиям при $y=0$ и $y=\infty$, есть

$$v_x^{(1)}=\operatorname{Re}\left\{v_0\cos kx\cdot e^{-i\omega t}\left(1-e^{-\varkappa y}\right)\right\},$$

где

$$\varkappa=\sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}}=\frac{1-i}{\delta}. \tag{80,4}$$

Соответствующая функция тока (удовлетворяющая условию $\psi^{(1)}=0$ при $y=0$, эквивалентному условию $v_y^{(1)}=0$) есть

$$\psi^{(1)}=\operatorname{Re}\left\{v_0\cos kx\cdot\zeta^{(1)}(y)\,e^{-i\omega t}\right\}, \tag{80,5}$$
$$\zeta^{(1)}(y)=y+\frac{1}{\varkappa}e^{-\varkappa y}.$$

В следующем приближении пишем $\mathbf{v}=\mathbf{v}^{(1)}+\mathbf{v}^{(2)}$ и для скорости $\mathbf{v}^{(2)}$ получаем из (80,2) уравнение

$$\frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 v_x^{(2)}}{\partial y^2}=U\frac{\partial U}{\partial x}-v_x^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x}-v_y^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y}. \tag{80,6}$$

В правой стороне имеются члены с частотами $\omega+\omega=2\omega$ и $\omega-\omega=0$. Последние приводят к появлению в $\mathbf{v}^{(2)}$ не зависящих от времени членов, которые и описывают интересующее нас стационарное движение; ниже мы будем понимать под $\mathbf{v}^{(2)}$ только эту часть скорости. Соответствующую часть функции тока пишем в виде

$$\psi^{(2)}=\frac{v_0^2}{c}\sin 2kx\cdot\zeta^{(2)}(y) \tag{80,7}$$

и для функции $\zeta^{(2)}(y)$ находим уравнение

$$\delta^2\psi^{(2)'''}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left|\zeta^{(1)'}\right|^2+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\zeta^{(1)*}\zeta^{(1)''}\right), \tag{80,8}$$

где штрихи означают дифференцирование по y.

Решение этого уравнения должно удовлетворять условиям $\zeta^{(2)}(0)=0$, $\zeta^{(2)\prime}(0)=0$, эквивалентным требованию $v_x^{(2)}=v_y^{(2)}=0$ на твердой поверхности. Что же касается условий вдали от стенки, то можно лишь потребовать, чтобы скорость $v_x^{(2)}$ стремилась к конечному значению (но не к нулю). Подстановка (80,5) в (80,8) и двукратное интегрирование приводят к следующему результату для производной $\zeta^{(2)\prime}$:

$$\zeta^{(2)\prime}(y)=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}e^{-2y/\delta}-e^{-y/\delta}\sin\frac{y}{\delta}-\frac{1}{4}e^{-y/\delta}\cos\frac{y}{\delta}+\frac{y}{4\delta}e^{-y/\delta}\left(\cos\frac{y}{\delta}-\sin\frac{y}{\delta}\right).$$

При $y\to\infty$ она стремится к значению

$$\zeta^{(2)\prime}(\infty)=3/8, \tag{80,9}$$

чему отвечает скорость

$$v_x^{(2)}(\infty)=\frac{3v_0^2}{8c}\sin 2kx. \tag{80,10}$$

Этот результат демонстрирует указанное в начале параграфа явление. Мы видим, что вне пограничного слоя возникает (во втором приближении по v_0) стационарное движение, скорость которого не зависит от вязкости. Ее значение (80,10) служит граничным условием при определении акустического течения в основной области движения (см. задачу)[1]).

Задача

Определить акустическое течение в пространстве между двумя плоскопараллельными стенками (плоскости $y=0$ и $y=h$), в котором имеется стоячая звуковая волна (80,3). Расстояние h между плоскостями (играющее роль характерной длины l) удовлетворяет условиям (80,1) (*Rayleigh*, 1883).

Решение. Ввиду малости скорости $v^{(2)}$ искомого стационарного движения по сравнению со скоростью звука, его можно считать несжимаемым. Более того, ввиду предполагаемой сколь угодной малости скорости v_0 в звуковой волне (а вместе с ней и скорости $v^{(2)}\sim v_0^2/c$), в уравнении движения можно пренебречь квадратичными членами[2]). Тогда уравнение (15,12) для

---

[1]) Поперечная скорость, отвечающая продольной скорости (80,9), есть

$$v_y^{(2)}=-\frac{3v_0^2k}{4c}y\cos 2kx\ll v_x^{(2)}.$$

При решении задачи о движении вне пограничного слоя эта скорость возникает автоматически в силу уравнения непрерывности, если поставить граничное условие $v_y^{(2)}=0$ при $y=0$.

[2]) Другими словами, отношение v_0/c предполагается малым по сравнению со всеми другими малыми параметрами задачи; в частности, $v_0/c\ll\delta/h$.

функции тока сводится к уравнению

$$\Delta^2\psi^{(2)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \psi^{(2)} = 0$$

(отметим, что оно возникает из члена с вязкостью, но сама вязкость из него выпадает). Ищем $\psi^{(2)}$ в виде (80,7). Ввиду условия $h \ll \lambda$ производные по y велики по сравнению с производными по x; пренебрегая последними, получим для функции $\zeta^{(2)}(y)$ уравнение

$$\zeta^{(2)''''} = 0. \qquad (1)$$

Ввиду очевидной симметрии задачи, течение симметрично относительно плоскости $y = h/2$. Это значит, что

$$v_x^{(2)}(x, y) = v_x^{(2)}(x, h-y), \quad v_y^{(2)}(x, y) = -v_y^{(2)}(x, h-y),$$

для чего должно быть

$$\zeta^{(2)}(y) = -\zeta^{(2)}(h-y).$$

Таким решением уравнения (1) является

$$\zeta^{(2)}(y) = A\left(y - \frac{h}{2}\right) + B\left(y - \frac{h}{2}\right)^3.$$

Постоянные A и B определяются граничными условиями

$$\zeta^{(2)}(0) = 0, \quad \zeta^{(2)'}(0) = 3/8.$$

В результате находим для функции тока выражение

$$\psi^{(2)} = \frac{3v_0^2}{16c}\sin 2kx\left[-\left(y - \frac{h}{2}\right) + \frac{(y - h/2)^3}{(h/2)^2}\right],$$

а из него следующие окончательные формулы для распределения скоростей:

$$v_x^{(2)} = -\frac{3v_0^2}{16c}\sin 2kx\left[1 - \frac{3(y-h/2)^2}{(h/2)^2}\right],$$

$$v_y^{(2)} = \frac{3v_0^2 k}{8c}\cos 2kx\left[\left(y - \frac{h}{2}\right) - \frac{(y-h/2)^3}{(h/2)^2}\right].$$

Скорость $v_x^{(2)}$ меняет знак на расстоянии $(h/2)\left(1 - 3^{-1/2}\right) = 0{,}423h/2$ от стенки.

Описываемое этими формулами течение состоит из двух рядов вихрей, симметрично расположенных относительно серединной плоскости $y = h/2$ и периодичных вдоль оси x с периодом $\lambda/2$.

§ 81. Вторая вязкость

Второй коэффициент вязкости ζ (мы будем говорить о нем просто как о *второй вязкости*) имеет обычно тот же порядок величины, что и коэффициент вязкости η. Существуют, однако, случаи, когда ζ может достигать значений, значительно превышающих значения η. Как мы знаем, вторая вязкость проявляется в тех процессах, которые сопровождаются изменением объема (т. е. плотности) жидкости. При сжатии или расширении, как и при всяком другом быстром изменении состояния, в жид-