

функции тока сводится к уравнению

$$\Delta^2 \psi^{(2)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi^{(2)} = 0$$

(отметим, что оно возникает из члена с вязкостью, но сама вязкость из него выпадает). Ищем $\psi^{(2)}$ в виде (80,7). Ввиду условия $h \ll \lambda$ производные по y велики по сравнению с производными по x ; пренебрегая последними, получим для функции $\zeta^{(2)}(y)$ уравнение

$$\zeta^{(2)''''} = 0. \quad (1)$$

Ввиду очевидной симметрии задачи, течение симметрично относительно плоскости $y = h/2$. Это значит, что

$$v_x^{(2)}(x, y) = v_x^{(2)}(x, h - y), \quad v_y^{(2)}(x, y) = -v_y^{(2)}(x, h - y),$$

для чего должно быть

$$\zeta^{(2)}(y) = -\zeta^{(2)}(h - y).$$

Таким решением уравнения (1) является

$$\zeta^{(2)}(y) = A \left(y - \frac{h}{2} \right) + B \left(y - \frac{h}{2} \right)^3.$$

Постоянные A и B определяются граничными условиями

$$\zeta^{(2)}(0) = 0, \quad \zeta^{(2)'}(0) = 3/8.$$

В результате находим для функции тока выражение

$$\psi^{(2)} = \frac{3v_0^2}{16c} \sin 2kx \left[- \left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{(y - h/2)^3}{(h/2)^2} \right],$$

а из него следующие окончательные формулы для распределения скоростей:

$$v_x^{(2)} = - \frac{3v_0^2}{16c} \sin 2kx \left[1 - \frac{3(y - h/2)^2}{(h/2)^2} \right],$$

$$v_y^{(2)} = \frac{3v_0^2 k}{8c} \cos 2kx \left[\left(y - \frac{h}{2} \right) - \frac{(y - h/2)^3}{(h/2)^2} \right].$$

Скорость $v_x^{(2)}$ меняет знак на расстоянии $(h/2)(1 - 3^{-1/2}) = 0,423h/2$ от стенки.

Описываемое этими формулами течение состоит из двух рядов вихрей, симметрично расположенных относительно серединной плоскости $y = h/2$ и периодичных вдоль оси x с периодом $\lambda/2$.

§ 81. Вторая вязкость

Второй коэффициент вязкости ζ (мы будем говорить о нем просто как о *второй вязкости*) имеет обычно тот же порядок величины, что и коэффициент вязкости η . Существуют, однако, случаи, когда ζ может достигать значений, значительно превышающих значения η . Как мы знаем, вторая вязкость проявляется в тех процессах, которые сопровождаются изменением объема (т. е. плотности) жидкости. При сжатии или расширении, как и при всяком другом быстром изменении состояния, в жид-

кости нарушается термодинамическое равновесие, в связи с чем в ней начинаются внутренние процессы, стремящиеся восстановить это равновесие. Обычно эти процессы настолько быстры (т. е. их время релаксации настолько мало), что восстановление равновесия успевает практически полностью следовать за ходом изменения объема, если только, конечно, скорость этого изменения не слишком велика.

Существуют случаи, когда время релаксации процессов установления равновесия в теле велико, т. е. эти процессы протекают сравнительно медленно. Так, если мы имеем дело с жидкостью или газом, представляющими собой смесь веществ, между которыми может происходить химическая реакция, то при каждом данном состоянии плотности и температуре существует определенное состояние химического равновесия, характеризующееся определенными концентрациями веществ в смеси. Если, например, сжать жидкость, то состояние равновесия нарушится и начнет происходить реакция, в результате которой концентрации веществ будут стремиться принять равновесные значения, соответствующие новому значению плотности (и температуры). Если скорость этой реакции не слишком велика, то установление равновесия происходит сравнительно медленно и не будет поспевать за изменением сжатия. Процесс сжатия будет сопровождаться тогда внутренними процессами приближения к состоянию равновесия. Но процессы установления равновесия являются процессами необратимыми; они сопровождаются возрастанием энтропии и, следовательно, диссипацией энергии. Поэтому, если время релаксации этих процессов велико, то при сжатии или расширении жидкости происходит значительная диссипация энергии, и поскольку эта диссипация должна определяться второй вязкостью, то мы приходим к выводу, что ζ будет велико¹⁾.

Интенсивность процессов диссипации, а с ними и величина ζ , зависит, естественно, от соотношения между скоростью процессов сжатия и расширения и временем релаксации. Если, например, речь идет о сжатиях и расширениях, вызываемых звуковой волной, то вторая вязкость будет зависеть от частоты волны. Таким образом, значение второй вязкости не будет просто константой, характеризующей данное вещество, а само будет зависеть от частоты того движения, в котором она проявляется. О зависимости величины ζ от частоты говорят как о ее дисперсии.

Излагаемый ниже метод общего рассмотрения всех этих явлений принадлежит *Л. И. Мандельштаму* и *М. А. Леонтовичу* (1937).

¹⁾ Медленным процессом, приводящим к большему ζ , часто является также передача энергии от поступательных степеней свободы молекул к колебательным (внутримолекулярным) степеням свободы.

Пусть ξ — некоторая физическая величина, характеризующая состояние тела, а ξ_0 — ее значение в состоянии равновесия; ξ_0 является функцией от плотности и температуры. Так, для жидких (или газовых) смесей величиной ξ может являться концентрация одного из веществ в смеси, а ξ_0 есть тогда значение концентрации при химическом равновесии.

Если тело не находится в состоянии равновесия, то величина ξ будет меняться со временем, стремясь принять значение ξ_0 . В состояниях, близких к равновесному, разность $\xi - \xi_0$ мала, и можно разложить скорость $\dot{\xi}$ изменения ξ в ряд по этой разности. Член нулевого порядка в этом разложении отсутствует, так как $\dot{\xi}$ должно обратиться в нуль в состоянии равновесия, т. е. при $\xi = \xi_0$. Поэтому с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau}(\xi - \xi_0). \quad (81,1)$$

Коэффициент пропорциональности между $\dot{\xi}$ и $\xi - \xi_0$ должен быть отрицательным, так как в противном случае ξ не стремилось бы к конечному пределу. Положительная постоянная τ имеет размерность времени и может рассматриваться как время релаксации для данного процесса; чем τ больше, тем медленнее происходит приближение к равновесию.

В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, в которых жидкость подвергается периодическому адиабатическому¹⁾ сжатию и расширению, так что переменная часть плотности (и других термодинамических величин) зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$; речь идет о звуковой волне в жидкости. Вместе с плотностью и другими величинами меняется также и положение равновесия, так что ξ_0 можно написать в виде $\xi_0 = \xi_{00} + \xi'_0$, где ξ_{00} — постоянное значение ξ_0 , соответствующее среднему значению плотности, а ξ'_0 — периодическая часть, пропорциональная $e^{-i\omega t}$. Написав истинное значение ξ в виде $\xi = \xi_{00} + \xi'$, мы заключаем из уравнения (81,1), что ξ' тоже является периодической функцией времени и связано с ξ'_0 посредством

$$\xi' = \frac{\xi'_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (81,2)$$

Вычислим производную от давления по плотности при рассматриваемом процессе. Давление должно теперь рассматриваться как функция от значений плотности и величины ξ в данном состоянии, а также от энтропии, которая предполагается

¹⁾ Изменение энтропии (в состояниях, близких к равновесному) является величиной второго порядка малости. Поэтому с точностью до величин первого порядка можно говорить об адиабатичности процесса.

постоянной и которую мы будем для краткости просто опускать. Имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho}.$$

Согласно (81,2) подставляем сюда

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi_0'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

и получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right\}.$$

Сумма

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

есть не что иное, как производная от p по ρ при процессе настолько медленном, что жидкость находится все время в состоянии равновесия; обозначая ее посредством $(\partial p / \partial \rho)_{\text{равн}}$, имеем окончательно:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн}} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right]. \quad (81,3)$$

Пусть, далее, p_0 — давление в состоянии термодинамического равновесия; p_0 связано с другими термодинамическими величинами уравнением состояния жидкости и является при заданных плотности и энтропии вполне определенной величиной. Давление же p в неравновесном состоянии отлично от p_0 и является функцией также и от ξ . Если плотность получает адиабатическое приращение $\delta\rho$, то равновесное давление меняется на

$$\delta p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн}} \delta\rho,$$

между тем как полное приращение давления есть $(\partial p / \partial \rho) \delta\rho$, где $\partial p / \partial \rho$ определяется формулой (81,3). Поэтому разность $p - p_0$ между истинным и равновесным давлениями в состоянии с плотностью $\rho + \delta\rho$ равна

$$p - p_0 = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн}} \right] \delta\rho = \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн}} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right] \delta\rho.$$

Нас интересуют здесь те изменения плотности, которые обусловлены движением жидкости. Тогда $\delta\rho$ связано со скоростью уравнением непрерывности, которое мы напишем в виде

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где d/dt обозначает полную производную по времени. При периодическом движении имеем: $d\delta\rho/dt = -i\omega\delta\rho$, и поэтому

$$\delta\rho = \frac{\rho}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Подставляя это выражение в $p - p_0$, получаем:

$$p - p_0 = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau} (c_0^2 - c_\infty^2) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (81,4)$$

где введены обозначения

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{равн}}, \quad c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\xi, \quad (81,5)$$

смысл которых выяснится ниже.

Для того чтобы связать полученные выражения с вязкостью жидкости, напишем тензор напряжений σ_{ik} . В этот тензор давления входит в виде члена $-\rho\delta_{ik}$. Выделяя отсюда давление p_0 , определяющееся уравнением состояния, находим, что в неравновесном состоянии в σ_{ik} входит дополнительный член

$$-(p - p_0)\delta_{ik} = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau} (c_\infty^2 - c_0^2) \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

С другой стороны, сравнивая это с общим выражением (15,2—3) для тензора напряжений, в которое $\operatorname{div} \mathbf{v}$ входит в виде $\xi \operatorname{div} \mathbf{v}$, мы приходим к результату, что наличие медленных процессов установления равновесия макроскопически эквивалентно наличию второй вязкости, равной

$$\xi = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau} (c_\infty^2 - c_0^2). \quad (81,6)$$

На обычную же вязкость η эти процессы не влияют. При процессах, настолько медленных, что $\tau\omega \ll 1$, ξ равно

$$\xi_0 = \tau\rho (c_\infty^2 - c_0^2). \quad (81,7)$$

ξ растет с увеличением времени релаксации τ в согласии со сказанным выше. При больших частотах ξ оказывается функцией частоты, т. е. обнаруживает дисперсию.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом влияет наличие процессов с большим временем релаксации (для определенности будем говорить о химических реакциях) на распространение звука в жидкости. Для этого можно было бы исходить из уравнения движения вязкой жидкости с ξ , определяемым формулой (81,6). Проще, однако, рассматривать движение формально как не вязкое, но с давлением p , определяющимся не уравнением состояния, а полученными здесь формулами. Тогда все известные нам уже из § 64 общие соотношения остаются формально применимыми. В частности, связь волнового век-

тора с частотой по-прежнему определяется формулой $k = \omega/c$, где $c = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$, причем производная $\partial p / \partial \rho$ равна выражению (81,3). (Величина c не имеет, однако, теперь смысла скорости звука уже хотя бы потому, что она комплексна.) Таким образом, получаем:

$$k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_0^2 - c_\infty^2 i\omega\tau}}. \quad (81,8)$$

Определяемый этой формулой «волновой вектор» является величиной комплексной. Легко выяснить смысл этого обстоятельства. В плоской волне все величины зависят от координаты x (в направлении распространения) посредством множителя e^{ikx} . Написав k в виде $k = k_1 + ik_2$ с вещественными k_1 и k_2 , получаем $e^{ikx} = e^{ik_1x} e^{-k_2x}$, т. е. наряду с периодическим множителем e^{ik_1x} получается также затухающий множитель e^{-k_2x} (k_2 должно быть, конечно, положительным). Таким образом, комплексность волнового вектора является формальным выражением того, что волна затухает, т. е. имеет место поглощение звука. При этом вещественная часть комплексного «волнового вектора» определяет изменение фазы волны с расстоянием, а мнимая его часть есть коэффициент поглощения.

Нетрудно отделить в (81,8) вещественную и мнимую части; в общем случае произвольных ω выражения для k_1 и k_2 довольно громоздки, и мы не выписываем их здесь. Существенно, что k_1 (как и k_2) является функцией частоты. Таким образом, если в жидкости могут происходить химические реакции, то распространение звука с достаточно большими частотами) сопровождается дисперсией.

В предельном случае малых частот ($\omega\tau \ll 1$) формула (81,8) дает в первом приближении $k = \omega/c_0$, что соответствует распространению звука со скоростью c_0 . Так, разумеется, и должно было быть: условие $\omega\tau \ll 1$ означает, что период $1/\omega$ звуковой волны велик по сравнению со временем релаксации; другими словами, установление химического равновесия практически успевает следовать за колебаниями плотности в звуковой волне, и поэтому скорость звука должна определяться равновесной производной $(\partial p / \partial \rho)_{\text{равн}}$. В следующем приближении имеем:

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i \frac{\omega^2\tau}{2c_0^3} (c_\infty^2 - c_0^2), \quad (81,9)$$

т. е. появляется затухание с коэффициентом, пропорциональным квадрату частоты. С помощью (81,7) мнимую часть k можно написать в виде $k_2 = \omega^2 \zeta_0 / 2\rho c_0^3$; это совпадает с зависящей от ζ частью коэффициента поглощения γ (79,6), полученного без учета дисперсии.

В обратном предельном случае больших частот ($\omega\tau \gg 1$) имеем в первом приближении $k = \omega/c_\infty$, т. е. распространение звука со скоростью c_∞ — результат опять-таки естественный, поскольку при $\omega\tau \gg 1$ можно считать, что за время одного периода реакция вовсе не успевает произойти; поэтому скорость звука должна определяться производной $(\partial\rho/\partial\rho)_\xi$, взятой при постоянных концентрациях. В следующем приближении имеем:

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} + i \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2\tau c_\infty^3}. \quad (81,10)$$

Коэффициент поглощения оказывается не зависящим от частоты. При переходе от $\omega \ll 1/\tau$ к $\omega \gg 1/\tau$ этот коэффициент монотонно возрастает, стремясь к постоянному значению, определяемому формулой (81,10). Заметим, что величина k_2/k_1 , характеризующая поглощение на расстоянии, равном длине волны, оказывается в обоих предельных случаях малой ($k_2/k_1 \ll 1$); она имеет максимум при некоторой промежуточной частоте (равной $\omega\tau = \sqrt{c_0/c_\infty}$).

Уже из формулы, например, (81,7) видно, что

$$c_\infty > c_0 \quad (81,11)$$

(поскольку должно быть $\zeta > 0$). В том же самом можно убедиться с помощью простых рассуждений на основании принципа Ле-Шателье.

Предположим, что под влиянием внешнего воздействия объем системы уменьшается (а плотность увеличивается). Этим система выводится из состояния равновесия, и согласно принципу Ле-Шателье в ней должны начаться процессы, стремящиеся уменьшить давление. Это значит, что величина $\partial\rho/\partial\rho$ будет уменьшаться, и когда система вновь вернется в состояние равновесия, значение $\partial\rho/\partial\rho = c^2$ будет меньшим, чем оно было в неравновесном состоянии.

При выводе всех формул мы предполагали, что имеется всего один медленный внутренний процесс релаксации. Возможны также и случаи, когда имеется одновременно несколько различных таких процессов. Все формулы могут быть без труда обобщены на такой случай. Вместо одной величины ξ мы будем иметь теперь ряд величин ξ_1, ξ_2, \dots , характеризующих состояние тела, и соответственно ряд времен релаксации τ_1, τ_2, \dots . Выберем величины ξ_n таким образом, чтобы каждая из производных $\dot{\xi}_n$ зависела только от соответствующего ξ_n , т. е. чтобы было

$$\dot{\xi}_n = -\frac{1}{\tau_n} (\xi_n - \xi_{0n}). \quad (81,12)$$

Вычисления, вполне аналогичные предыдущим, приводят тогда к формуле

$$c^2 = c_\infty^2 + \sum_n \frac{a_n}{1 - i\omega\tau_n}, \quad (81,13)$$

где $c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi$, а постоянные a_n равны

$$a_n = \frac{\partial p}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}. \quad (81,14)$$

При всего одной величине ξ эта формула, как и должно быть, переходит в формулу (81,3).