§ 86. Ударные волны слабой интенсивности

Рассмотрим ударную волну, в которой все величины испытывают лишь небольшой скачок; о таких разрывах мы будем говорить как об ударных волнах слабой интенсивности. Преобразуем соотношение (85,9), производя в нем разложение по степеням малых разностей $s_2 - s_1$ и $p_2 - p_1$. Мы увидим, что при таком разложении в (85,9) сокращаются члены первого и второго порядков по $p_2 - p_1$; поэтому необходимо производить разложение по $p_2 - p_1$ до членов третьего порядка включительно. По разности же $s_2 - s_1$ достаточно разложить до членов первого порядка. Имеем:

$$w_2 - w_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial s_1}\right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial w}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3}\right)_s (p_2 - p_1)^3.$$

Но согласно термодинамическому соотношению $dw = Tds + Vdp$ имеем для производных:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s = V.$$

Поэтому

$$w_2 - w_1 = T_1 (s_2 - s_1) + V_1 (p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3.$$

Объем V_2 достаточно разложить только по $p_2 - p_1$, поскольку во втором члене уравнения (85,9) уже имеется малая разность $p_2 - p_1$ и разложение по $s_2 - s_1$ дало бы член порядка $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, не интересующий нас. Таким образом,

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2.$$

Подставляя эти разложения в (85,9), получим следующее соотношение:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12 T_1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3. \qquad (86,1)$$

Таким образом, скачок энтропии в ударной волне слабой интенсивности является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

Адиабатическая сжимаемость вещества $-(\partial V/\partial p)_s$ практически всегда падает с увеличением давления, т. е. вторая производная [1])

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \tag{86,2}$$

Подчеркнем, однако, что это неравенство не является термодинамическим соотношением и, в принципе, возможны его нарушения [2]). Как мы неоднократно увидим ниже, в газодинамике знак производной (86,2) весьма существен; в дальнейшем мы будем всегда считать его положительным.

Проведем через точку *1* (p_1, V_1) на p, V-диаграмме две кривые — ударную адиабату и адиабату Пуассона. Уравнение адиабаты Пуассона есть $s_2 - s_1 = 0$. Из сравнения этого уравнения с уравнением (86,1) ударной адиабаты вблизи точки *1* видно, что обе кривые касаются в этой точке, причем имеет место касание второго порядка — совпадают не только первые, но и вторые производные. Для того чтобы выяснить взаимное расположение обеих кривых вблизи точки *1*, воспользуемся тем, что согласно (86,1) и (86,2) при $p_2 > p_1$ на ударной адиабате должно быть $s_2 > s_1$, между тем как на адиабате Пуассона остается $s_2 = s_1$. Поэтому абсцисса точки на ударной адиабате должна быть при той же ординате p_2 больше абсциссы точки на адиабате Пуассона. Это следует из того, что согласно известной термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

энтропия растет с увеличением объема при постоянном давлении — для всех тел, которые расширяются при нагревании, т. е. у которых $(\partial V/\partial T)_p > 0$. Аналогично убеждаемся в том, что ниже точки *1* (т. е. при $p_2 < p_1$) абсциссы точек адиабаты Пуассона должны быть больше абсцисс ударной адиабаты. Таким образом, вблизи точки своего касания обе кривые расположены указанным на рис. 55 образом (HH' — ударная адиабата, а PP' — адиабаты Пуассона) [3]), причем в силу (86,2) обе обращены вогнутостью вверх.

---

[1]) Для политропного газа

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{\gamma+1}{\gamma^2}\,\frac{V}{p^2}.$$

Это выражение проще всего можно получить путем дифференцирования уравнения адиабаты Пуассона $pV^\gamma = \mathrm{const}$.

[2]) Так, это может иметь место в области вблизи критической точки жидкость — газ. Ситуация с нарушением условия (86,2) может быть также имитирована на ударной адиабате для среды, допускающей фазовый переход (в результате чего на адиабате возникает излом). См. об этом в книге: *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — Изд. 2-е. — М.: Наука, 1966, гл. I, § 19; гл. XI, § 20.

[3]) При $(\partial V/\partial T)_p < 0$ расположение обеих кривых было бы обратным.

При малых $p_2 - p_1$ и $V_2 - V_1$ формулу (85,6) можно написать в первом приближении в виде

$$j^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s$$

(мы пишем здесь производную при постоянной энтропии, имея в виду, что касательные к адиабатам Пуассона и ударной в точке 1 совпадают). Далее, скорости v_1 и v_2 в том же приближении одинаковы и равны

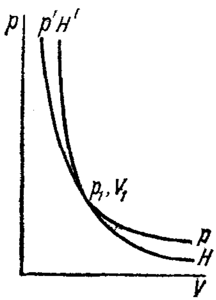

Рис. 55

$$v = jV = \sqrt{-V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

Но это есть не что иное, как скорость звука c. Таким образом, скорость распространения ударных волн слабой интенсивности совпадает в первом приближении со скоростью звука:

$$v = c. \tag{86,3}$$

Из полученных свойств ударной адиабаты в окрестности точки 1 можно вывести ряд существенных следствий. Поскольку в ударной волне должно выполняться условие $s_2 > s_1$, то должно быть и

$$p_2 > p_1,$$

т. е. точки 2 (p_2, V_2) должны находиться выше точки 1. Далее, поскольку хорда 12 идет круче касательной к адиабате в точке 1 (рис. 53), а тангенс угла наклона этой касательной равен производной $(\partial p_1/\partial V_1)_{s_1}$, имеем:

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1}.$$

Умножая это неравенство с обеих сторон на V_1^2, находим:

$$j^2 V_1^2 = v_1^2 > -V_1^2\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_1}\right)_{s_1} = c_1^2,$$

где c_1 — скорость звука, соответствующая точке 1. Таким образом,

$$v_1 > c_1.$$

Наконец, из того, что хорда 12 расположена менее круто, чем касательная в точке 2, аналогичным образом следует, что $v_2 < c_2$[1].

[1] Последняя аргументация применима только вблизи точки 1, где тангенс угла наклона касательной к ударной адиабате в точке 2 отличается от производной $(\partial p_2/\partial V_2)_{s_2}$ лишь на величину второго порядка малости.

Упомянем еще, в заключение, что при $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$ из условия $s_2 > s_1$ для ударных волн слабой интенсивности следовало бы $p_2 < p_1$, а для скоростей — те же неравенства $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$.

§ 87. Направление изменения величин в ударной волне

Таким образом, в предположении положительности производной (86,2) для ударных волн слабой интенсивности можно весьма просто показать, что условие возрастания энтропии с необходимостью приводит также и к неравенствам

$$p_2 > p_1, \tag{87,1}$$

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2. \tag{87,2}$$

Из замечания, сделанного по поводу формулы (85,6) следует, что если $p_2 > p_1$, то

$$V_2 < V_1, \tag{87,3}$$

а поскольку $j = v_1/V_1 = v_2/V_2$, то и [1])

$$v_1 > v_2. \tag{87,4}$$

Неравенства (87,1) и (87,3) означают, что при прохождении газа через ударную волну происходит его сжатие — его давление и плотность возрастают. Неравенство $v_1 > c_1$ означает, что ударная волна движется относительно находящегося перед ней газа со сверхзвуковой скоростью; ясно поэтому, что в этот газ не могут проникнуть никакие исходящие от ударной волны возмущения. Другими словами, наличие ударной волны вовсе не сказывается на состоянии газа впереди нее.

Покажем теперь, что все неравенства (87,1—4) справедливы и для ударных волн произвольной интенсивности — при том же предположении о знаке производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ [2]).

Величина j^2 определяет наклон хорды, проведенной из начальной точки ударной адиабаты *1* в произвольную точку *2* ($-j^2$ есть тангенс угла наклона этой хорды к оси V). Покажем, прежде всего, что направление изменения этой величины при перемещении точки *2* вдоль адиабаты однозначно связано с направлением изменения энтропии s_2 при том же перемещении.

---

[1]) Если перейти в систему отсчета, в которой газ *1* перед ударной волной покоится, а волна движется, то неравенство $v_1 > v_2$ означает, что газ позади ударной волны будет двигаться (со скоростью $v_1 - v_2$) в ту же сторону, куда движется сама волна.

[2]) Неравенства (87,1—4) были получены для ударных волн произвольной интенсивности в политропном газе *Жуге* (*E. Jouguet*, 1904) и *Цемпленом* (*G. Zemplen*, 1905). Излагаемое ниже доказательство для произвольной среды дано *Л. Д. Ландау* (1944).