Упомянем еще, в заключение, что при $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$ из условия $s_2 > s_1$ для ударных волн слабой интенсивности следовало бы $p_2 < p_1$, а для скоростей — те же неравенства $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$.

§ 87. Направление изменения величин в ударной волне

Таким образом, в предположении положительности производной (86,2) для ударных волн слабой интенсивности можно весьма просто показать, что условие возрастания энтропии с необходимостью приводит также и к неравенствам

$$p_2 > p_1, \tag{87,1}$$

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2. \tag{87,2}$$

Из замечания, сделанного по поводу формулы (85,6) следует, что если $p_2 > p_1$, то

$$V_2 < V_1, \tag{87,3}$$

а поскольку $j = v_1/V_1 = v_2/V_2$, то и[1]

$$v_1 > v_2. \tag{87,4}$$

Неравенства (87,1) и (87,3) означают, что при прохождении газа через ударную волну происходит его сжатие — его давление и плотность возрастают. Неравенство $v_1 > c_1$ означает, что ударная волна движется относительно находящегося перед ней газа со сверхзвуковой скоростью; ясно поэтому, что в этот газ не могут проникнуть никакие исходящие от ударной волны возмущения. Другими словами, наличие ударной волны вовсе не сказывается на состоянии газа впереди нее.

Покажем теперь, что все неравенства (87,1—4) справедливы и для ударных волн произвольной интенсивности — при том же предположении о знаке производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$[2].

Величина j^2 определяет наклон хорды, проведенной из начальной точки ударной адиабаты *1* в произвольную точку *2* ($-j^2$ есть тангенс угла наклона этой хорды к оси V). Покажем, прежде всего, что направление изменения этой величины при перемещении точки *2* вдоль адиабаты однозначно связано с направлением изменения энтропии s_2 при том же перемещении.

---

[1] Если перейти в систему отсчета, в которой газ *1* перед ударной волной покоится, а волна движется, то неравенство $v_1 > v_2$ означает, что газ позади ударной волны будет двигаться (со скоростью $v_1 - v_2$) в ту же сторону, куда движется сама волна.

[2] Неравенства (87,1—4) были получены для ударных волн произвольной интенсивности в политропном газе *Жуге* (*E. Jouguet*, 1904) и *Цемпленом* (*G. Zemplen*, 1905). Излагаемое ниже доказательство для произвольной среды дано *Л. Д. Ландау* (1944).

Продифференцируем соотношения (85,5) и (85,8) по величинам, относящимся к газу *2* при заданном состоянии газа *1*. Это значит, что дифференцируются p_2, V_2, w_2 и j при заданных значениях p_1, V_1, w_1. Из (85,5) получаем:

$$dp_2 + j^2 dV_2 = (V_1 - V_2)\, d(j^2), \tag{87,5}$$

а из (85,8):

$$dw_2 + j^2 V_2\, dV_2 = \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) d\left(j^2\right)$$

или, раскрыв дифференциал dw_2:

$$T_2\, ds_2 + V_2\left(dp_2 + j^2 dV_2\right) = \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) d\left(j^2\right).$$

Подставив сюда $dp_2 + j^2 dV_2$ из (87,5), получим соотношение

$$T_2\, ds_2 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^2\, d(j^2). \tag{87,6}$$

Отсюда видно, что

$$d(j^2)/ds_2 > 0, \tag{87,7}$$

т. е. j^2 и s_2 меняются в одинаковом направлении.

Дальнейшие рассуждения имеют своей следующей целью показать, что на ударной адиабате не может быть точек, в которых бы она касалась проведенной из точки *1* прямой (как это имело бы место в точке *O* на рис. 56.

В такой точке угол наклона хорды (проведенной из точки *1*) имеет минимум, а j^2 — соответственно максимум, и потому

$$d(j^2)/dp_2 = 0.$$

Из соотношения (87,6) видно, что в таком случае будет и

$$ds_2/dp_2 = 0.$$

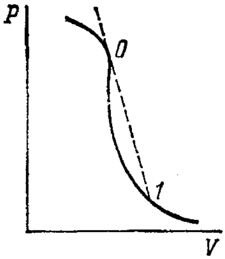

Рис. 56

Далее, вычислим производную $d(j^2)/dp_2$ в произвольной точке ударной адиабаты. Подставив в соотношение (87,5) дифференциал dV_2 в виде

$$dV_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} dp_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} ds_2,$$

взяв для ds_2 выражение (87,6) и разделив все равенство на dp_2, получим

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = \frac{1 + j^2\left(\dfrac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}}{(V_1 - V_2)\left[1 - \dfrac{j^2(V_1 - V_2)}{2T_2}\left(\dfrac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2}\right]}. \tag{87,8}$$

Отсюда видно, что обращение этой производной в нуль влечет за собой также и равенство

$$1+j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}=1-\frac{v_2^2}{c_2^2}=0,$$

т. е. $v_2=c_2$. Обратно, из равенства $v_2=c_2$ следует, что производная $d(j^2)/dp_2=0$; последняя могла бы не обратиться в нуль, лишь если бы вместе с числителем в (87,8) обратился бы в нуль также и знаменатель; но выражения в числителе и знаменателе представляют собой две различные функции точки 2 на ударной адиабате, их одновременное обращение в нуль могло бы произойти лишь чисто случайно и потому невероятно[1].

Таким образом, все три равенства

$$\frac{d(j^2)}{dp_2}=0,\quad \frac{ds_2}{dp_2}=0,\quad v_2=c_2 \tag{87,9}$$

являются следствиями друг друга и имели бы место одновременно в точке O на кривой рис. 56 (имея в виду последнее из этих равенств, будем условно называть такую точку *звуковой*). Наконец, для производной от $(v_2/c_2)^2$ в этой точке имеем

$$\frac{d}{dp_2}\left(\frac{v_2^2}{c_2^2}\right)=-\frac{d}{dp_2}\left[j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}\right]=-j^2\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial p_2^2}\right)_{s_2}.$$

Ввиду предполагаемой везде положительности производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ имеем, следовательно, в звуковой точке:

$$\frac{d}{dp_2}\frac{v_2}{c_2}<0. \tag{87,10}$$

Теперь уже легко доказать невозможность существования звуковой точки на ударной адиабате. В точках, лежащих вблизи начальной точки 1 над ней, имеем $v_2<c_2$ (см. конец предыдущего параграфа). Поэтому равенство $v_2=c_2$ может быть достигнуто лишь при увеличении v_2/c_2; другими словами, в звуковой точке должно было бы быть $d(v_2/c_2)/dp_2>0$, между тем как согласно (87,10) мы имеем как раз обратное неравенство. Аналогичным образом можно убедиться в невозможности обращения v_2/c_2 в единицу и на нижней части ударной адиабаты, под точкой 1.

Имея в виду доказанную таким образом невозможность существования звуковых точек, можно заключить непосредственно из графика ударной адиабаты, что угол наклона хорды 12 уменьшается при передвижении точки 2 вверх по кривой, а j^2 соот-

---

[1] Подчеркнем, во избежание недоразумений, что сама производная $d(j^2)/dp_2$ не является еще одной независимой функцией точки 2; выражение (87,8) есть ее определение.

ветственно монотонно возрастает; ввиду неравенства (87,7) отсюда следует, что монотонно возрастает и энтропия s_2. Таким образом, при соблюдении необходимого условия $s_2 > s_1$ будет и $p_2 > p_1$.

Легко, далее, убедиться в том, что на верхней части ударной адиабаты справедливы также и неравенства $v_2 < c_2$, $v_1 > c_1$. Первое следует прямо из того, что оно справедливо вблизи точки *1*, а сделаться равным единице отношение v_2/c_2 нигде не может. Второе следует из того, что ввиду невозможности такого перегиба адиабаты, какой изображен на рис. 56, всякая хорда из точки *1* в находящуюся над ней точку *2* расположена более круто, чем касательная к ударной адиабате в точке *1*.

Таким образом, на верхней части ударной адиабаты выполняются условие $s_2 > s_1$ и все три неравенства (87,1—2). Наоборот, на нижней части адиабаты все эти условия не выполняются. Следовательно, все эти условия оказываются эквивалентными друг другу и выполнение одного из них автоматически влечет за собой также и выполнение всех остальных.

Напомним лишний раз, что в изложенных рассуждениях все время предполагалось выполненным условие положительности производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$. Если эта производная могла бы менять знак, то из необходимого термодинамического неравенства $s_2 > s_1$ уже нельзя было бы сделать никаких универсальных заключений о неравенствах для остальных величин.

§ 88. Эволюционность ударных волн

Вывод неравенств (87,1—4) в §§ 86, 87 был связан с определенным предположением о термодинамических свойствах среды — с положительностью производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$. Весьма существенно, однако, что неравенства

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2 \tag{88,1}$$

для скоростей могут быть получены также и из совершенно иных соображений, показывающих, что ударные волны с нарушенными условиями (88,1) все равно не могли бы существовать, даже если бы это не противоречило изложенным выше чисто термодинамическим соображениям[1].

Именно необходимо исследовать еще вопрос об устойчивости ударных волн. Наиболее общее необходимое условие устойчивости состоит в требовании, чтобы любое бесконечно малое воз-

---

[1] Напомним в то же время, что (по крайней мере для ударных волн слабой интенсивности) эти термодинамические соображения приводят к условиям (88,1) также и при $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$, когда ударная волна является волной разрежения (а не сжатия); это обстоятельство было отмечено в конце § 86.