

среды. Искусственно созданный разрыв, не удовлетворяющий этим условиям, немедленно распался бы на другие разрывы¹⁾.

Эволюционная ударная волна устойчива по отношению к рассматриваемому типу возмущений и в обычном смысле этого слова. Если искать смещение ударной волны (a с ним и возмущения всех остальных величин) в виде, пропорциональном $e^{-i\omega t}$, то заранее очевидно, что однозначно определяемое граничными условиями значение ω может быть только нулем — уже хотя бы из тех соображений, что в задаче нет никаких параметров размерности обратного времени, которые могли бы определить отличное от нуля значение ω .

Мы вернемся к вопросу об устойчивости ударных волн в § 90.

§ 89. Ударные волны в политропном газе

Применим полученные в предыдущих параграфах общие соотношения к ударным волнам в политропном газе.

Тепловая функция такого газа дается простой формулой (83,11). Подставив это выражение в (85,9), получим после простого преобразования следующую формулу:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \\ &= \frac{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_2}{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2}. \end{aligned} \quad (89,1)$$

По этой формуле можно определить по трем из величин p_1, V_1, p_2, V_2 четвертую. Отношение V_2/V_1 является монотонно убывающей функцией отношения p_2/p_1 , стремящейся к конечному пределу $(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Кривая, изображающая зависимость между p_2 и V_2 при заданных p_1, V_1 (ударная адиабата), представлена на рис. 58. Это — равнобочная гиперболола с асимптотами

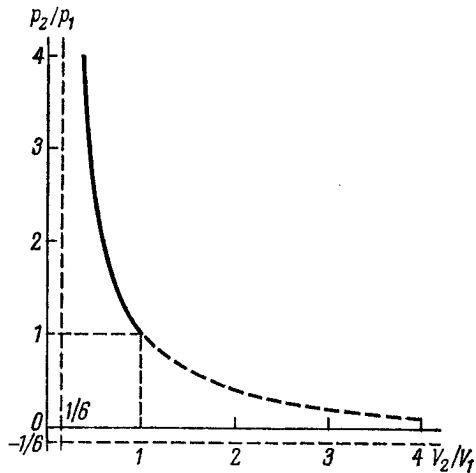


Рис. 58

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

¹⁾ Во всех перечисленных на рис. 57 неэволюционных случаях возмущение недоопределено — число произвольных параметров превышает число уравнений. Упомянем, что в магнитной гидродинамике ударные волны могут быть неэволюционными в силу как недоопределенности, так и переопределенности возмущений (см. VIII, § 73).

Реальным смыслом обладает, как мы знаем, только верхняя часть кривой над точкой $V_2/V_1 = \rho_2/\rho_1 = 1$, изображенная на рис. 58 (для $\gamma = 1,4$) сплошной линией.

Для отношения температур с обеих сторон разрыва имеем согласно уравнению состояния термодинамически идеального газа $T_2/T_1 = \rho_2 V_2/\rho_1 V_1$, так что

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{(\gamma + 1) \rho_1 + (\gamma - 1) \rho_2}{(\gamma - 1) \rho_1 + (\gamma + 1) \rho_2} \right]. \quad (89,2)$$

Для потока j получаем из (85,6) и (89,1):

$$j^2 = \frac{(\gamma - 1) \rho_1 + (\gamma + 1) \rho_2}{2V_1} \quad (89,3)$$

и отсюда для скорости распространения ударной волны относительно газов впереди и позади нее:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{V_1}{2} [(\gamma - 1) \rho_1 + (\gamma + 1) \rho_2] = \frac{c_1^2}{2\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{\rho_2}{\rho_1} \right], \\ v_2^2 &= \frac{V_1}{2} \frac{[(\gamma + 1) \rho_1 + (\gamma - 1) \rho_2]^2}{[(\gamma - 1) \rho_1 + (\gamma + 1) \rho_2]} = \frac{c_2^2}{2\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{\rho_1}{\rho_2} \right], \end{aligned} \quad (89,4)$$

и для разности скоростей:

$$v_1 - v_2 = \frac{\sqrt{2V_1} (\rho_2 - \rho_1)}{[(\gamma - 1) \rho_1 + (\gamma + 1) \rho_2]^{1/2}}. \quad (89,5)$$

В применениях полезны формулы, выражающие отношения плотностей, давлений и температур в ударной волне через число $M_1 = v_1/c_1$; эти формулы без труда выводятся из полученных выше соотношений и гласят:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}, \quad (89,6)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (89,7)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1) M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}. \quad (89,8)$$

Число же $M_2 = v_2/c_2$ выражается через число M_1 посредством

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}. \quad (89,9)$$

Это соотношение симметрично относительно M_1 и M_2 , как это становится очевидным, если записать его в виде уравнения

$$2\gamma M_1^2 M_2^2 - (\gamma - 1) (M_1^2 + M_2^2) = 2.$$

Выпишем предельные формулы для ударных волн очень большой интенсивности (требуется, чтобы было $(\gamma - 1)p_2 \gg (\gamma - 1)p_1$). Имеем из (89,1—2):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_2}{p_1}. \quad (89,10)$$

Отношение T_2/T_1 неограниченно растет вместе с p_2/p_1 , т. е. скачок температуры, как и скачок давления, в ударной волне может быть сколь угодно большим. Отношение же плотностей стремится к постоянному пределу; так, для одноатомного газа предельное значение $\rho_2 = 4\rho_1$, для двухатомного $\rho_2 = 6\rho_1$. Скорости распространения ударной волны большой интенсивности равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} p_2 V_1}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} p_2 V_1}. \quad (89,11)$$

Они растут пропорционально корню из давления p_2 .

Наконец, приведем соотношения для ударных волн слабой интенсивности, представляющие собой первые члены разложений по степеням малого отношения $z \equiv (p_2 - p_1)/p_1$:

$$M_1 - 1 = 1 - M_2 = \frac{\gamma + 1}{4\gamma} z, \quad \frac{c_2}{c_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} z, \\ \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{z}{\gamma} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} z^2. \quad (89,12)$$

Здесь сохранены члены, дающие первую поправку к значениям, отвечающим звуковому приближению.

Задачи

1. Получить формулу

$$v_1 v_2 = c_*^2,$$

где c_* — критическая скорость (*L. Prandtl*).

Решение. Поскольку величина $w + v^2/2$ непрерывна на ударной волне, можно ввести критическую скорость, одинаковую для газов 1 и 2 согласно-

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma - 1) \rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma p_2}{(\gamma - 1) \rho_2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_*^2.$$

(ср. (83,7)). Определяя из этих равенств p_2/p_1 и ρ_1/ρ_1 и подставляя их в уравнение

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}$$

(результат комбинирования (85,1) и (85,2)), получим

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} (v_1 - v_2) \left(1 - \frac{c_*^2}{v_1 v_2} \right) = 0.$$

- Ввиду того что $v_1 \neq v_2$, отсюда следует искомое соотношение.

2. Определить отношение p_2/p_1 по заданным температурам T_1, T_2 для ударной волны в термодинамически идеальном газе с непостоянной теплоемкостью.

Решение. Для такого газа можно лишь утверждать, что w (как и v) есть функция только от температуры и что p, V, T связаны уравнением состояния $pV = RT/\mu$. Решая уравнение (85,9) относительно p_2/p_1 , получаем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu}{RT_1} (\omega_2 - \omega_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} + \sqrt{\left[\frac{\mu}{RT_1} (\omega_2 - \omega_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} \right]^2 + \frac{T_2}{T_1}},$$

где $\omega_1 = w(T_1), \omega_2 = w(T_2)$.

§ 90. Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Соблюдение условий эволюционности само по себе необходимо, но еще недостаточно для гарантирования устойчивости ударной волны. Волна может оказаться неустойчивой по отношению к возмущениям, характеризующимся периодичностью вдоль поверхности разрыва и представляющим собой как бы «рябь», или «гофрировку», на этой поверхности (такого рода возмущения рассматривались уже в § 29 для тангенциальных разрывов)¹⁾. Покажем, каким образом исследуется этот вопрос для ударных волн в произвольной среде (С. П. Дьяков, 1954).

Пусть ударная волна покоится, занимая плоскость $x = 0$; жидкость движется сквозь нее слева направо, в положительном направлении оси x . Пусть поверхность разрыва испытывает возмущение, при котором ее точки смещаются вдоль оси x на малую величину

$$\xi = \xi_0 e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad (90,1)$$

где k_y — волновой вектор «ряби». Эта рябь на поверхности вызывает возмущение течения позади ударной волны, в области $x > 0$ (течение же перед разрывом, $x < 0$, не испытывает возмущения в силу своей сверхзвуковой скорости).

Произвольное возмущение течения складывается из энтропийно-вихревой волны и звуковой волны (см. задачу к § 82). В обеих зависимость величин от времени и координат дается множителем вида $\exp[i(ky - \omega t)]$ с той же частотой ω , что и в (90,1). Из соображений симметрии очевидно, что волновой вектор k лежит в плоскости xy ; его y -компонента совпадает с k_y в (90,1), а x -компонента различна для возмущений двух типов.

В энтропийно-вихревой волне $kv_2 = \omega$, т. е. $k_x = \omega/v_2$ (v_2 — невозмущенная скорость газа за разрывом). В этой волне возмущение давления отсутствует, возмущение удельного объема связано с возмущением энтропии, $\delta V^{(энт)} = (\partial V/\partial s)_p \delta s$, а возму-

¹⁾ Неустойчивость по отношению к таким возмущениям называют гофрировочной (corrugation instability по английской терминологии).