

(индекс H у производных указывает, что они берутся вдоль адиабаты Гюгонио¹⁾). Граничное условие (90,7) заменяется теперь на

$$\begin{aligned} \delta v_2 - \delta v_1 &= -\frac{v_1 - v_2}{2} \left[\frac{\delta p_2 - \delta p_1}{p_2 - p_1} - \frac{\delta V_2 - \delta V_1}{V_1 - V_2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2i} [\delta p_2 - \delta p_1 - j^2 (\delta V_2 - \delta V_1)]. \end{aligned}$$

Приравняв два выражения для $\delta v_2 - \delta v_1$, получим для искомого отношения амплитуд в прошедшей и падающей звуковых волнах:

$$\frac{\delta p^{(\text{эв})}}{\delta p^{(0)}} = \frac{(1 + M_1)^2 + q}{1 + 2M_2 - h}, \quad (2)$$

где h имеет прежнее значение, а

$$q = j^2 \left[-\frac{V_1^2}{c_1^2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial V_1} \right)_H + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_1} \right)_H \right].$$

Для политропного газа

$$q = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^2}{M_1^2}$$

и коэффициент прохождения:

$$\frac{\delta p^{(\text{эв})}}{\delta p^{(0)}} = \frac{(1 + M_1)^2}{1 + 2M_2 + M_1^{-2}} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{M_1} \right)^2 \right].$$

При слабой интенсивности ударной волны отсюда получается

$$\frac{\delta p^{(\text{эв})}}{\delta p^{(0)}} \approx 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2 - p_1}{p_1},$$

а в обратном случае большой интенсивности:

$$\frac{\delta p^{(\text{эв})}}{\delta p^{(0)}} \approx \frac{1}{\gamma + \sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}} \frac{p_2}{p_1}.$$

В обоих случаях амплитуда давления в прошедшей звуковой волне возрастает по сравнению с давлением в падающей волне.

§ 91. Распространение ударной волны по трубе

Рассмотрим распространение ударной волны по среде, заполняющей длинную трубку с переменным сечением. Наша цель состоит при этом в выяснении влияния, оказываемого изменением площади ударной волны на ее скорость (*G. B. Whitham, 1958*).

Будем считать, что площадь $S(x)$ сечения трубки лишь медленно меняется вдоль ее длины (ось x) — мало на расстояниях

¹⁾ Производная $(\partial V_2 / \partial p_2)_H$ есть то, что мы обозначали выше просто как dV_2/dp_2 , подразумевая, что производная берется при постоянных p_1, V_1 .

порядка ширины трубки. Это дает возможность применить приближение (его называют *гидравлическим*), которое уже было использовано в § 77: можно считать все величины в потоке постоянными вдоль каждого поперечного сечения трубки, а скорость — направленной вдоль ее оси; другими словами, течение рассматривается как квазиодномерное. Такое течение описывается уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (91,1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \quad (91,2)$$

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v S) = 0. \quad (91,3)$$

Первое из них — уравнение Эйлера, второе — уравнение адиабатичности, а третье — уравнение непрерывности, представленное в виде (77,1).

Для выяснения интересующего нас вопроса достаточно рассмотреть трубку, в которой изменение площади $S(x)$ не только медленно, но и по абсолютной величине остается относительно малым на протяжении всей длины. Тогда будут малы и связанные с непостоянством сечения возмущения потока, и уравнения (91,1—3) могут быть линеаризованы. Наконец, должны быть поставлены начальные условия, исключающие появление каких-либо посторонних возмущений, которые могли бы повлиять на движение ударной волны; нас интересуют только возмущения, связанные с изменением $S(x)$. Эта цель будет достигнута, если принять, что ударная волна первоначально движется с постоянной скоростью по трубе постоянного сечения, и площадь сечения начинает меняться только вправо от некоторой точки (которую примем за $x = 0$).

Линеаризованные уравнения (91,1—3) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + v \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + v \frac{\partial \delta p}{\partial x} - c^2 \left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\rho v}{S} \frac{\partial \delta S}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

где буквы без индекса обозначают постоянные значения величин в однородном потоке в однородной части трубки, а символ δ обозначает изменение этих величин в трубке переменного сечения. Умножив первое и третье из этих уравнений соответственно на ρc и c^2 и сложив затем все три уравнения, напишем следующую их комбинацию:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (\delta p + \rho c \delta v) = - \frac{\rho v c^2}{S} \frac{\partial \delta S}{\partial x}. \quad (91,4)$$

Общее решение этого уравнения дается суммой общего решения однородного уравнения и частного решения уравнения с правой частью. Первое есть $F(x - vt - ct)$, где F — произвольная функция; оно описывает звуковые возмущения, приходящие слева. Но в однородной области, при $x < 0$, возмущений нет; поэтому надо положить $F \equiv 0$. Таким образом, решение сводится к интегралу неоднородного уравнения:

$$\delta p + \rho c \delta v = - \frac{\rho v c^2}{v + c} \frac{\delta S}{S}. \quad (91,5)$$

Ударная волна движется слева направо со скоростью $v_1 > c_1$ по неподвижной среде с заданными значениями ρ_1, ρ_1 . Движение же среды позади ударной волны (среда 2) определяется решением (91,5) во всей области трубки слева от точки, достигнутой разрывом к данному моменту времени. После прохождения волны все величины в каждом сечении трубки остаются постоянными во времени, т. е. равными тем значениям, которые они получили в момент прохождения разрыва: давление p_2 , плотность ρ_2 и скорость $v_1 - v_2$ (в соответствии с принятыми в этой главе обозначениями, v_2 обозначает скорость газа относительно движущейся ударной волны; скорость же его относительно стенок трубки есть тогда $v_1 - v_2$). В этих обозначениях (и снова выделив переменные части этих величин) равенство (91,5) запишем в виде

$$\frac{\delta S}{S} = - \frac{v_1 - v_2 + c_2}{\rho_2 (v_1 - v_2) c_2^2} \{ \delta p_2 + \rho_2 c_2 (\delta v_1 - \delta v_2) \}. \quad (91,6)$$

Все величины $\delta v_1, \delta v_2, \delta p_2$ можно выразить через одну из них, например, δv_1 . Для этого пишем варьированные соотношения (85,1—2) на разрыве (при заданных ρ_1 и ρ_1):

$$\rho_1 \delta v_1 = v_2 \delta \rho_2 + \rho_2 \delta v_2, \quad 2j (\delta v_1 - \delta v_2) = \delta p_2 + v_2^2 \delta \rho_2$$

(где $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ — невозмущенное значение потока); к ним надо еще присоединить соотношение

$$\delta p_2 = \frac{d p_2}{d \rho_2} \delta \rho_2,$$

где производная берется вдоль адиабаты Гюгонио. Вычисление приводит к следующему окончательному соотношению, связывающему изменение δv_1 скорости ударной волны относительно неподвижного газа перед ней, с изменением δS площади сечения трубки:

$$- \frac{1}{S} \frac{\delta S}{\delta v_1} = \frac{v_1 - v_2 + c_2}{v_1 c_2} \left[\frac{1 + 2v_2/c_2 - h}{1 + h} \right], \quad (91,7)$$

где снова введено обозначение

$$h = - \frac{j^2}{\rho_2^2} \frac{d \rho_2}{d p_2} = j^2 \frac{d V_2}{d p_2}. \quad (91,8)$$

Коэффициент при квадратной скобке в (91,7) положителен. Поэтому знак отношения $\delta v_1/\delta S$ определяется знаком выражения в этой скобке. Для всех устойчивых ударных волн этот знак положителен, так что $\delta v_1/\delta S < 0$. Но при выполнении какого-либо из условий (90,12—13) гофрированной неустойчивости выражение в скобках становится отрицательным, так что $\delta v_1/\delta S > 0$.

Этот результат дает возможность наглядного истолкования происхождения неустойчивости. На рис. 62 изображена «гофрированная» поверхность ударной волны, перемещающаяся направо; стрелками схематически показано направление линий тока. При перемещении ударной волны на выдавшихся вперед участках поверхности площадь δS растет, а на отставших участках — уменьшается. При $\delta v_1/\delta S < 0$ это приводит к замедлению выступивших участков и ускорению отставших, так что поверхность стремится сгладиться. Напротив, при $\delta v_1/\delta S > 0$ возмущение формы поверхности будет усиливаться: выступающие участки будут уходить все дальше, а отставшие — все более отставать¹⁾.

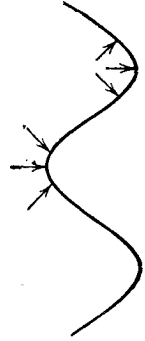


Рис. 62

§ 92. Косая ударная волна

Рассмотрим стационарную ударную волну, отказавшись при этом от подразумевавшегося везде выше выбора системы координат, в которой скорость газа направлена перпендикулярно к данному элементу поверхности волны. Линии тока могут пересекать поверхность такой ударной волны наклонно, причем пересечение сопровождается преломлением линий тока. Касательная составляющая скорости газа не меняется при прохождении через ударную волну, а нормальная составляющая согласно (87,4) падает:

$$v_{1t} = v_{2t}, \quad v_{1n} > v_{2n}.$$

Поэтому ясно, что при прохождении через ударную волну линии тока приближаются к ней (как это показано на рис. 63). Таким образом, преломление линий тока на ударной волне происходит всегда в определенном направлении.

Выберем направление скорости v_1 газа перед ударной волной в качестве оси x , и пусть φ — угол между поверхностью разрыва и осью x (рис. 63). Возможные значения угла φ ограничены лишь условием, чтобы нормальная составляющая скорости v_1

¹⁾ Выражение (91,7) для произвольной (не политропной) среды и его связь с условиями гофрированной неустойчивости ударных волн указаны С. Г. Суягом и В. Е. Фортговым, А. Л. Ни (1981).