

Коэффициент при квадратной скобке в (91,7) положителен. Поэтому знак отношения $\delta v_1/\delta S$ определяется знаком выражения в этой скобке. Для всех устойчивых ударных волн этот знак положителен, так что $\delta v_1/\delta S < 0$. Но при выполнении какого-либо из условий (90,12—13) гофрированной неустойчивости выражение в скобках становится отрицательным, так что $\delta v_1/\delta S > 0$.

Этот результат дает возможность наглядного истолкования происхождения неустойчивости. На рис. 62 изображена «гофрированная» поверхность ударной волны, перемещающаяся направо; стрелками схематически показано направление линий тока. При перемещении ударной волны на выдавшихся вперед участках поверхности площадь δS растет, а на отставших участках — уменьшается. При $\delta v_1/\delta S < 0$ это приводит к замедлению выступивших участков и ускорению отставших, так что поверхность стремится сгладиться. Напротив, при $\delta v_1/\delta S > 0$ возмущение формы поверхности будет усиливаться: выступающие участки будут уходить все дальше, а отставшие — все более отставать¹⁾.

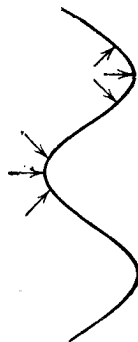


Рис. 62

§ 92. Косая ударная волна

Рассмотрим стационарную ударную волну, отказавшись при этом от подразумевавшегося везде выше выбора системы координат, в которой скорость газа направлена перпендикулярно к данному элементу поверхности волны. Линии тока могут пересекать поверхность такой ударной волны наклонно, причем пересечение сопровождается преломлением линий тока. Касательная составляющая скорости газа не меняется при прохождении через ударную волну, а нормальная составляющая согласно (87,4) падает:

$$v_{1t} = v_{2t}, \quad v_{1n} > v_{2n}.$$

Поэтому ясно, что при прохождении через ударную волну линии тока приближаются к ней (как это показано на рис. 63). Таким образом, преломление линий тока на ударной волне происходит всегда в определенном направлении.

Выберем направление скорости v_1 газа перед ударной волной в качестве оси x , и пусть φ — угол между поверхностью разрыва и осью x (рис. 63). Возможные значения угла φ ограничены лишь условием, чтобы нормальная составляющая скорости v_1

¹⁾ Выражение (91,7) для произвольной (не политропной) среды и его связь с условиями гофрированной неустойчивости ударных волн указаны С. Г. Сугаком и В. Е. Фортговым, А. Л. Ни (1981).

превышала скорость звука c_1 . Поскольку $v_{1n} = v \sin \varphi$, то отсюда следует, что φ может иметь произвольные значения в интервале между $\pi/2$ и углом Маха α_1 :

$$\alpha_1 < \varphi < \pi/2, \quad \sin \alpha_1 = c_1/v_1 \equiv 1/M_1.$$

Движение позади ударной волны может быть как до-, так и сверхзвуковым (меньше скорости звука c_2 должна быть лишь нормальная компонента скорости); движение же перед ударной волной — непременно сверхзвуковое.

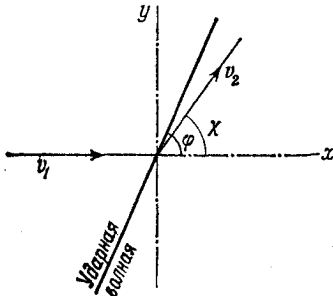


Рис. 63

Если движение газа по обе стороны от ударной волны является сверхзвуковым, то все возмущения могут распространяться вдоль ее поверхности лишь в ту сторону, куда направлена касательная к ней составляющая скорости газа. В этом смысле можно говорить о «направлении» ударной волны и различать по отношению к какому-либо месту «исходящие» из него и «приходящие» волны (подобно тому как мы это уже делали для характеристик, вокруг которых движение всегда является сверхзвуковым; см. § 82). Если же движение позади ударной волны является дозвуковым, то понятие о ее направлении теряет, строго говоря, смысл, так как возмущения могут распространяться вдоль ее поверхности во все стороны.

Выведем соотношение, связывающее друг с другом две компоненты скорости газа после его прохождения через косую ударную волну; при этом будем предполагать газ политропным.

Непрерывность касательной к волне составляющей скорости означает, что $v_1 \cos \varphi = v_{2x} \cos \varphi + v_{2y} \sin \varphi$, или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}}. \quad (92,1)$$

Далее, воспользуемся формулой (89,6); в этой формуле v_1 и v_2 обозначают нормальные к плоскости ударной волны составляющие скорости и должны быть теперь заменены на $v_1 \sin \varphi$ и $v_{2x} \sin \varphi - v_{2y} \cos \varphi$, так что имеем:

$$\frac{v_{2x} \sin \varphi - v_{2y} \cos \varphi}{v_1 \sin \varphi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2c_1^2}{(\gamma + 1)v_1^2 \sin^2 \varphi}. \quad (92,2)$$

Из двух написанных соотношений можно исключить угол φ . После простых преобразований получим следующую формулу,

определяющую связь между v_{2x} и v_{2y} (при заданных v_1 и c_1):

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{\frac{2}{\gamma+1} \left(v_1 - \frac{c_1^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{c_1^2}{v_1}}. \quad (92,3)$$

Этой формуле можно придать более изящный вид, если ввести в нее критическую скорость. Согласно уравнению Бернулли и определению критической скорости имеем:

$$v_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_*^2$$

(ср. задачу 1 § 89), откуда

$$c_*^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2 + \frac{2}{\gamma+1} c_1^2. \quad (92,4)$$

Введя эту величину в (92,3), получим:

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{\frac{2}{\gamma+1} v_1^2 - v_1 v_{2x} + c_*^2}. \quad (92,5)$$

Уравнение (92,5) называют уравнением *ударной поляры* (А. Busemann, 1931). На рис. 64 изображен график этой зависимости; это есть кривая третьего порядка (так называемая строфоида или декартов лист).

Она пересекает ось абсцисс в точках P и Q (рис. 64), соответствующих значениям $v_{2x} = c_*^2/v_1$ и $v_{2x} = v_1^1$). Проведя из начала координат луч (OB на рис. 64) под углом χ к оси абсцисс по длине его отрезка до точки пересечения с кривой ударной поляры, мы определяем скорость газа за скачком, поворачивающим поток на угол χ . Таких точек пересечения имеется две (A и B), т. е. заданному значению χ отвечают две различные ударные волны. Направление ударной волны тоже может быть

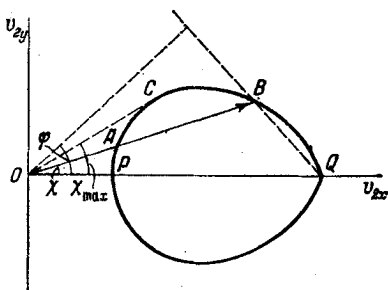


Рис. 64

1) От точки Q, являющейся двойной точкой кривой, строфоида в действительности продолжается еще в виде двух уходящих к бесконечным $|v_{2y}|$ ветвей (не изображенных на рис. 64) с общей вертикальной асимптотой

$$v_{2x} = c_*^2/v_1 + 2v_1/(\gamma+1)$$

Однако точки этих ветвей не имеют физического смысла: они дали бы для v_{2x} , v_{2y} значения, при которых $v_{2n}/v_{1n} \geq 1$, что невозможно.

сразу определено графически по этой же диаграмме — оно определяется перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, проведенную из точки Q соответственно через точку B или A (на рис. 64 изображен угол φ для волны, соответствующей точке B). При уменьшении χ точка A приближается к точке P , отвечающей прямому ($\varphi = \pi/2$) скачку с $v_2 = c_*^2/v_1$. Точка же B приближается при этом к точке Q , причем интенсивность ударной волны (скачок скорости в ней) стремится к нулю; в пределе, в самой точке Q , угол φ равен, как и следовало, углу Маха α_1 (угол наклона касательной к полюре к оси абсцисс в этой точке равен $\pi/2 + \alpha_1$).

Из диаграммы ударной поляры сразу можно вывести важное заключение, что угол отклонения χ потока в ударной волне не может превышать некоторого максимального значения χ_{\max} , соответствующего лучу, проведенному из точки O касательно к кривой. χ_{\max} является, конечно, функцией числа $M_1 = v_1/c_*$; мы не приводим ее здесь ввиду ее громоздкости. При $M_1 = 1$ имеем $\chi_{\max} = 0$, а при возрастании M_1 угол χ_{\max} монотонно растет и при $M_1 \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу. Легко рассмотреть оба предельных случая.

Если скорость v_1 близка к c_* , то вместе с ней близка к c_* и скорость v_2 , а угол χ мал; уравнение ударной поляры (92,5) можно тогда приближенно переписать в виде¹⁾

$$\chi^2 = \frac{\gamma + 1}{2c_*^3} (v_1 - v_2)^2 (v_1 + v_2 - 2c_*) \quad (92,6)$$

(ввиду малости угла χ здесь положено $v_{2x} \approx v_2$, $v_{2y} \approx c_*\chi$). Отсюда элементарным путем найдем²⁾:

$$\chi_{\max} = \frac{4\sqrt{\gamma+1}}{3^{3/2}} \left(\frac{v_1}{c_*} - 1\right)^{3/2} = \frac{2^{7/2}}{3^{3/2}(\gamma+1)} (M_1 - 1)^{3/2}. \quad (92,7)$$

В обратном предельном случае, при $M_1 \rightarrow \infty$, ударная поляра вырождается в окружность

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x}) \left(v_{2x} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1\right).$$

Легко видеть, что при этом

$$\chi_{\max} = \arcsin(1/\gamma). \quad (92,8)$$

На рис. 65 изображен график зависимости χ_{\max} от M_1 для воздуха ($\gamma = 1,4$); горизонтальный пунктирный отрезок показывает

¹⁾ Можно легко убедиться в том, что уравнение (92,6) будет справедливым и для любого (не политропного) газа, если только заменить в нем величину $(\gamma + 1)/2$ на параметр α_* , определенный согласно (102,2).

²⁾ Отметим, что эта зависимость χ_{\max} от $M_1 - 1$ находится в согласии с общим законом подобия (126,7) для околосзвуковых течений.

предельное значение $\chi_{\max}(\infty) = 45,6^\circ$ (верхняя кривая на рисунке — аналогичный график для обтекания конуса; см. § 113).

Окружность $v_2 = c_*$ пересекает ось абсцисс между точками P и Q (рис. 64) и поэтому делит ударную поляру на две части, соответствующие до- и сверхзвуковым скоростям газа позади разрыва. Точка пересечения окружности $v_2 = c_*$ с полярой лежит правее точки C , но очень близко к ней; поэтому весь участок PC соответствует переходам к дозвуковым скоростям, а участок CQ (за исключением лишь очень небольшого участка вблизи точки C) — переходам к сверхзвуковым скоростям.

Изменения давления и плотности в косой ударной волне зависят только от нормальных к ней компонент скорости. Поэтому отношения p_2/p_1 и ρ_2/ρ_1 при заданных M_1 и φ получаются из формул (89,6—7) просто путем замены в них M_1 на $M_1 \sin \varphi$:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \varphi - 1), \quad (92,9)$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{2(M_1^2 \sin^2 \varphi - 1)}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varphi + 2}. \quad (92,10)$$

Эти отношения монотонно возрастают при увеличении угла φ от значения $\varphi = \alpha_1$ (когда $p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1 = 1$) до $\pi/2$, т. е. по мере перемещения по ударной поляре от точки Q к точке P .

Приведем еще, для справок, формулу, выражающую угол поворота χ скорости через число M_1 и угол φ :

$$\operatorname{ctg} \chi = \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2(M_1^2 \sin^2 \varphi - 1)} - 1 \right], \quad (92,11)$$

и формулу, определяющую число $M_2 = v_2/c_2$ по M_1 и φ :

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \varphi - (\gamma - 1)} + \frac{2M_1^2 \cos^2 \varphi}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varphi} \quad (92,12)$$

(при $\varphi = \pi/2$ последнее выражение переходит в (89,9)).

Две ударные волны, определяемые ударной полярой для заданного угла поворота скорости, называются волнами *слабого* и *сильного* семейства. Ударная волна сильного семейства (участок PC поляры) обладает большей интенсивностью (большим отношением p_2/p_1), образует больший угол φ с направлением скорости v_1 и превращает течение из сверх- в дозвуковое. Волна же слабого семейства (участок QC поляры) обладает

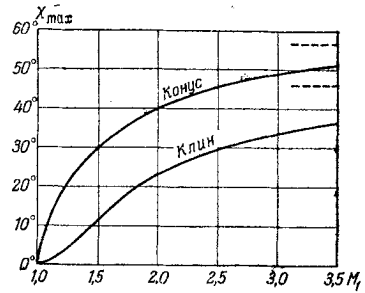


Рис. 65

меньшей интенсивностью, наклонена к потоку под меньшим углом и почти всегда оставляет течение сверхзвуковым.

Для иллюстрации на рис. 66 изображены зависимости угла χ отклонения скорости от угла φ наклона поверхности разрыва для воздуха ($\gamma = 1,4$) при нескольких различных значениях числа M_1 , в том числе для предела $M_1 \rightarrow \infty$. Ветви кривых, изображенные сплошными линиями, отвечают ударным волнам сла-

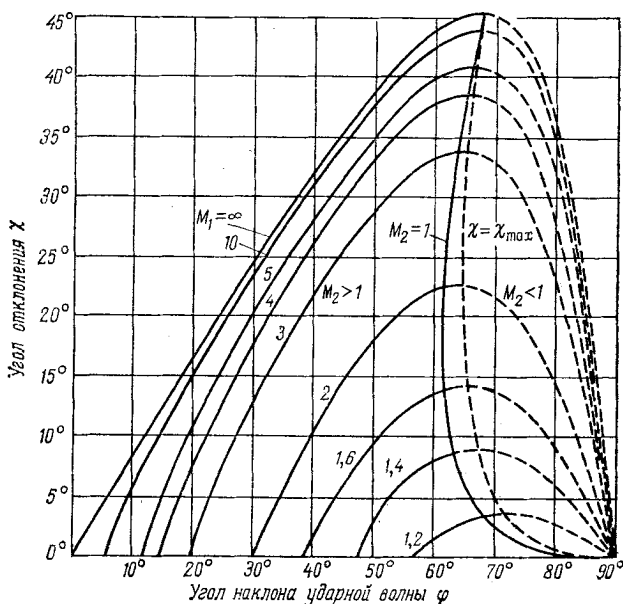


Рис. 66

бого семейства, а изображенные пунктиром — ударным волнам сильного семейства. Пунктирная линия $\chi = \chi_{\max}$ — геометрическое место точек максимального (при каждом заданном M_1) угла отклонения, а сплошная линия $M_2 = 1$ разделяет области сверх- и дозвукового течения позади разрыва; узкая область между этими двумя линиями отвечает ударным волнам слабого семейства, превращающим, однако, течение из сверх- в дозвуковое. Разность значений угла φ на линиях $\chi = \chi_{\max}$ и $M_2 = 1$ (при заданном M_1) нигде не превышает $4,5^\circ$; разность же между χ_{\max} и значением $\chi = \chi_{\text{эв}}$ на линии $M_2 = 1$ (тоже при заданном M_1), не превышает $0,5^\circ$ ¹⁾.

¹⁾ Подробные графики и диаграммы, относящиеся к ударной поляре (для $\gamma = 1,4$) можно найти в книгах: Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики. — М.: ИЛ, 1960. [Liepmann H. W., Roshko A. Elements of gas dynamics. — N. Y.: J. Wiley, 1957]; Oswatitsch K. Gas dynamics. — N. Y.: Academic Press, 1956.