§ 93. Ширина ударных волн

Мы говорили до сих пор об ударных волнах как о геометрических поверхностях, не обладающих толщиной. Рассмотрим теперь вопрос о структуре реальных физических поверхностей разрыва. Мы увидим, что ударные волны с небольшими скачками величин представляют собой в действительности переходные слои конечной толщины, уменьшающейся при увеличении величины скачков. Если же скачки величин в ударной волне не малы, то, действительно, разрыв происходит настолько резко, что в макроскопической теории не имеет смысла говорить о его толщине.

Для определения структуры и толщины переходного слоя надо учесть вязкость и теплопроводность газа, влиянием которых мы до сих пор пренебрегали.

Соотношения (85,1—3) на ударной волне были получены из условий постоянства потоков вещества, импульса и энергии. Если рассматривать поверхность разрыва как слой конечной толщины, то эти условия надо писать не в виде равенства соответствующих величин по обе стороны разрыва, а в виде их постоянства вдоль всей толщины разрывного слоя. Первое из этих условий (85,1) не меняется:

$$\rho v \equiv j = \mathrm{const}. \qquad (93,1)$$

В двух же других условиях надо учесть дополнительные потоки импульса и энергии, обусловленные внутренним трением и теплопроводностью.

Плотность потока импульса (вдоль оси x), обусловленного внутренним трением, определяется компонентой $-\sigma'_{xx}$ вязкого тензора напряжений; согласно общему выражению (15,3) для этого тензора имеем:

$$\sigma'_{xx} = \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{dv}{dx}.$$

Условие (85,2) приобретает теперь вид[1])

$$p + \rho v^2 - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{dv}{dx} = \mathrm{const}.$$

Как и в § 85, введем вместо скорости v удельный объем V согласно $v = jV$. Постоянную же в правой стороне равенства выразим через предельные значения величин на большом расстоянии впереди ударной волны (сторона 1). Тогда написанное

[1]) Положительное направление оси x совпадает с направлением движения газа через неподвижную ударную волну. Если перейти к системе отсчета, в которой неподвижен газ перед ударной волной, то сама ударная волна будет двигаться в отрицательном направлении оси x.

условие примет вид

$$p - p_1 + j^2(V - V_1) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) j \frac{dV}{dx} = 0. \tag{93,2}$$

Далее, плотность потока энергии, обусловленного теплопроводностью, есть $-\varkappa\partial T/\partial x$. Поток же энергии, связанный с внутренним трением, есть

$$-\sigma'_{xi}v_i = -\sigma'_{xx}v = -\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) v \frac{dv}{dx}.$$

Таким образом, условие (85,3) напишется в виде

$$\rho v\left(w + \frac{v^2}{2}\right) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) v \frac{dv}{dx} - \varkappa \frac{dT}{dx} = \text{const},$$

или, снова введя $v = jV$ и выразив const через величины с индексом 1:

$$w - w_1 + \frac{j^2}{2}(V^2 - V_1^2) - j\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) V \frac{dV}{dx} - \frac{\varkappa}{j}\frac{dT}{dx} = 0. \tag{93,3}$$

Мы будем рассматривать здесь ударные волны, в которых все величины испытывают лишь малый скачок. Тогда и все разности $V - V_1$, $p - p_1$ и т. п. между значениями величин внутри переходного слоя и вне его тоже малы. Из получающихся ниже соотношений видно, что $1/\delta$ (где δ — ширина разрыва) есть величина первого порядка малости по $p_2 - p_1$. Поэтому дифференцирование по x увеличивает порядок малости на единицу (так, производная dp/dx — величина второго порядка).

Умножим уравнение (93,2) на $(V + V_1)/2$ и вычтем его из уравнения (93,3). Тогда получим:

$$(w - w_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) = \frac{\varkappa}{j}\frac{dT}{dx} \tag{93,4}$$

(здесь опущен член, содержащий $(V - V_1)dV/dx$, являющийся малой величиной третьего порядка). Разложим выражение в левой стороне (93,4) по степеням $p - p_1$ и $s - s_1$, выбрав давление и энтропию в качестве основных независимых переменных. Члены первого и второго порядка по $p - p_1$ в этом разложении выпадают (ср. вычисления при выводе формулы (86,1)) и, опустив члены более высокого порядка, получим просто $T(s - s_1)$. Производную же dT/dx пишем в виде

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}.$$

Член с производной ds/dx можно опустить как малую величину третьего порядка (см. ниже), и в результате находим формулу, выражающую функцию $s(x)$ через функцию $p(x)$:

$$T(s - s_1) = \frac{\varkappa}{j}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{93,5}$$

Обратим внимание на то, что разность $s - s_1$ внутри переходного слоя оказывается величиной второго порядка малости, между тем как полный скачок $s_2 - s_1$ является (как было показано в § 86) величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления $p_2 - p_1$. Это связано с тем, что (как будет показано ниже) давление $p(x)$ меняется в переходном слое монотонно от одного предельного значения p_1 до другого p_2; энтропия же $s(x)$, определяясь производной dp/dx, проходит через максимум, достигая наибольшего значения внутри переходного слоя.

Уравнение, определяющее функцию $p(x)$, можно было бы получить путем аналогичного разложения уравнений (93,2—3) и их комбинирования друг с другом. Мы, однако, изберем другой, более поучительный способ, позволяющий более ясно понять происхождение различных членов в уравнении.

В § 79 было показано, что монохроматическое слабое возмущение состояния газа (звуковая волна) затухает по мере своего распространения с декрементом, пропорциональным квадрату частоты: $\gamma = a\omega^2$; положительный коэффициент a выражается через коэффициенты вязкости и теплопроводности согласно формуле (79,6). Там же было показано, что это затухание может быть описано (для произвольной плоской звуковой волны) введением дополнительного члена в линеаризованное уравнение движения — см. (79,9). Заменив в этом уравнении вторую производную по времени второй производной по координате и изменив знак перед производной $\partial p'/\partial x$ (что отвечает распространению волны в отрицательном направлении оси x[1])), запишем его в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c\frac{\partial p'}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \tag{93,6}$$

где p' — переменная часть давления.

Для учета слабой нелинейности надо ввести в это уравнение член вида $p'\partial p'/\partial x$:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c\frac{\partial p'}{\partial x} - \alpha_p p'\frac{\partial p'}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}. \tag{93,7}$$

Коэффициент α_p в нелинейном члене определяется путем соответствующего разложения гидродинамических уравнений идеальной (без диссипации) жидкости и оказывается равным

$$\alpha_p = \frac{c^3}{2V^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \tag{93,8}$$

(см. задачу)[2]).

---

[1]) Этот выбор направления распространения связан с замечанием, сделанным в примечании на с. 489.

[2]) Введя новую неизвестную функцию $u = -p'\alpha_p$, новую (вместо x) независимую переменную $\zeta = x + ct$ и обозначив $\mu = ac^3$, приведем уравнение

Уравнение (93,7) описывает распространение возмущений в слабо диссипирующей, слабо нелинейной среде. В применении к слабой ударной волне оно описывает ее распространение в системе отсчета, в которой невозмущенный газ (перед волной) неподвижен. Требуется найти решение со стационарным (не зависящим от времени) профилем, в котором вдали от волны, при $x \to \pm\infty$, давление принимает заданные значения p_2 и p_1; разность $p_2 - p_1$ есть скачок давления в разрыве[1]).

Волна со стационарным профилем описывается решением вида

$$p'(x, t) = p'(x + v_1 t), \tag{93,9}$$

где v_1 — скорость распространения такой волны. Подстановка в (93,7) приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left[(v_1 - c)\, p' - \frac{\alpha_p}{2} p'^2 - ac^3 \frac{dp'}{d\xi}\right] = 0, \qquad \xi = x + v_1 t,$$

первый интеграл которого:

$$ac^3 \frac{dp'}{d\xi} = -\frac{\alpha_p}{2} p'^2 + (v_1 - c)\, p' + \text{const}. \tag{93,10}$$

Квадратный трехчлен в правой стороне равенства должен обращаться в ноль при значениях p', отвечающих предельным условиям на бесконечностях, где производная $dp'/d\xi$ обращается в ноль. Эти значения равны $p_2 - p_1$ и 0 если условиться отсчитывать p' от невозмущенного давления p_1 перед волной. Это значит, что указанный трехчлен может быть представлен в виде

$$-\frac{\alpha_p}{2}\,[p' - (p_2 - p_1)]\, p',$$

причем константа v_1 выражается через p_1 и p_2 согласно

$$v_1 = c + \frac{\alpha_p}{2}(p_2 - p_1). \tag{93,11}$$

Для самого же давления p уравнение (93,10) принимает вид

$$ac^3 \frac{dp}{d\xi} = -\frac{\alpha_p}{2}(p - p_1)(p - p_2).$$

(93,7) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \tag{93,7a}$$

в котором его называют *уравнением Бюргерса* (*J. M. Burgers*, 1940).

[1]) Мы увидим в дальнейшем (§ 102), что в отсутствии диссипации эффекты нелинейности приводят к искажению профиля волны по мере ее распространения — постепенному возрастанию крутизны фронта волны. В свою очередь, это возрастание приводит к усилению диссипативных эффектов, стремящихся уменьшить крутизну профиля (т. е. уменьшить градиенты меняющихся величин). Именно взаимная компенсация этих противоположных тенденций приводит к возможности распространения волн со стационарным профилем в нелинейной диссипативной среде.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее требуемым условиям есть

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{th} \frac{(p_2 - p_1)(x + v_1 t)}{4ac^3/\alpha_p}.$$

Этим решается поставленная задача. Возвратившись снова к системе отсчета, в которой ударная волна покоится, напишем формулу, определяющую ход изменения давления в ней в виде

$$p - \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\delta}, \tag{93,12}$$

где

$$\delta = \frac{8aV^2}{(p_2 - p_1)(\partial^2 V/\partial p^2)_s}. \tag{93,13}$$

Практически все изменение давления от p_1 до p_2 происходит на расстоянии $\sim\delta$ — ширине ударной волны. Мы видим, что ширина волны уменьшается с увеличением ее интенсивности — скачка давления $p_2 - p_1$ [1]).

Для хода изменения энтропии внутри разрыва имеем из (93,5) и (93,12):

$$s - s_1 = \frac{\varkappa}{16caVT} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2 (x/\delta)}. \tag{93,14}$$

Отсюда видно, что энтропия меняется не монотонно, а имеет максимум внутри ударной волны (при $x = 0$). При $x = \pm\infty$ эта формула дает одинаковые значения $s = s_1$: это связано с тем, что полное изменение энтропии $s_2 - s_1$ является величиной третьего порядка по $p_2 - p_1$ (ср. (86,1)), в то время как $s - s_1$ — второго.

Формула (93,12) применима количественно только при достаточно малых разностях $p_2 - p_1$. Однако качественно мы можем применить формулу (93,13) для определения порядка величины ширины ударной волны и в тех случаях, когда разность $p_2 - p_1$ — порядка величины самих давлений p_1, p_2. Скорость звука в газе — порядка величины тепловой скорости v молекул. Кинематическая же вязкость, как известно из кинетической теории газов, $\nu \sim lv \sim lc$, где l — длина свободного пробега молекул. Поэтому $a \sim l/c^2$ (оценка члена с теплопроводностью дает то же самое). Наконец, $(\partial^2 V/\partial p^2)_s \sim V/p^2$ и $pV \sim c^2$. Внося эти выражения в (93,13), получаем:

$$\delta \sim l. \tag{93,15}$$

[1]) Для ударной волны, распространяющейся в смеси, определенный вклад в ее ширину возникает также и от процессов диффузии в переходном слое. Вычисление этого вклада см. *Дьяков С. П.* — ЖЭТФ, 1954, т. 27, с. 283.

Упомянем также, что ударные волны слабой интенсивности остаются устойчивыми по отношению к поперечной модуляции (ср. примечание на стр. 477) и при учете их диссипативной структуры; см. *Спектор М. Д.* — Письма ЖЭТФ, 1983, т. 35, с. 181.

Таким образом, ширина ударных волн большой интенсивности оказывается порядка величины длины свободного пробега молекул газа[1]). Но в макроскопической газодинамике, трактующей газ как сплошную среду, длина свободного пробега должна рассматриваться как равная нулю. Поэтому, строго говоря, чисто газодинамические методы непригодны для исследования внутренней структуры ударных волн большой интенсивности.

Задачи

1. Определить коэффициент нелинейности α в уравнении (93,7) для распространения звуковых волн в газе.

Решение. Точные гидродинамические уравнения одномерного движения идеального (без диссипации) газа:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\rho v=0. \tag{1}$$

Произведем их разложение с учетом членов второго порядка малости. Для этого полагаем

$$p=p_0+p',\quad \rho=\rho_0+\frac{p'}{c^2}+\frac{p'^2}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p^2}\right)_s. \tag{2}$$

Члены второго порядка в уравнениях можно упростить, приведя их всех к одинаковому виду — содержащему произведение $p'\partial p'/\partial x$. Для этого замечаем, что для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x (со скоростью c) дифференцирование по t эквивалентно дифференцированию по x/c; при этом $v=-p'/c\rho_0$. После всех этих замен получим из (1) и (2) следующие уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p'}{\partial t}=c\rho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s p'\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{4}$$

(индекс 0 у постоянных равновесных значений величин опускаем); здесь использовано также равенство

$$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p^2}\right)_s=\frac{2}{\rho c^4}-\rho^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \tag{5}$$

($V=1/\rho$ — удельный объем). Дифференцируя уравнения (3) и (5) соответственно по x и по t и вычтя одно из другого, получим

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)p'=c^2\rho^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s\frac{\partial}{\partial x}\left(p'\frac{\partial p'}{\partial x}\right).$$

С той же точностью заменяем в левой стороне этого уравнения $\partial/\partial x+\partial/c\partial t\to 2\partial/\partial x$. Наконец, вычеркнув с обоих сторон дифференцирования по x и сравнив получившееся уравнение с (93,7), найдем для α_p значение (93,8).

Уравнение для скорости v можно получить непосредственно из (93,7), не повторяя заново вычислений, подобных произведенным выше. Действительно, сумма членов первого порядка в левой стороне (93,7) содержит оператор

[1]) Сильная ударная волна сопровождается значительным увеличением температуры; под l надо понимать длину пробега, соответствующую некоторой средней температуре газа в волне.

$\partial/\partial t - c\partial/\partial x$, который надо рассматривать как малый первого порядка: он обращает в ноль функцию $p'(x, t)$ в ее линейном приближении. Поэтому мы получим уравнение для функции $v(x, t)$ в требуемом приближении, просто заменив в (93,7) p' согласно линейному соотношению $p' = -\rho c v$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_v v\frac{\partial v}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_v = \frac{c^4}{2V^3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s.$$

Величина α_v безразмерна; для политропного газа $\alpha_v = (\gamma + 1)/2$.

2. Путем нелинейной подстановки привести уравнение Бюргерса (93,7а) к виду линейного уравнения теплопроводности (*E. Hopf*, 1950).

Решение. Подстановкой

$$u(\zeta, t) = -2\mu\frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\varphi(\zeta, t) \tag{1}$$

уравнение (93,7а) приводится к виду

$$2\mu\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\varphi}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)\right] = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} = \varphi\frac{df(t)}{dt},$$

где посредством df/dt обозначена произвольная функция t. Переобозначением $\varphi \to \varphi e^f$ (не меняющим искомой функции $u(\zeta, t)$) это уравнение преобразуется к требуемому виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}. \tag{3}$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\varphi(\zeta, 0) = \varphi_0(\zeta)$ дается формулой (51,3):

$$\varphi(\zeta, t) = 2(\pi\mu t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(\zeta')\exp\left\{-\frac{(\zeta-\zeta')^2}{4\mu t}\right\}d\zeta'. \tag{4}$$

Начальная же функция $\varphi_0(\zeta)$ связана с начальным значением искомой функции $u(\zeta, t)$ равенством

$$\ln\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\mu}\int_0^{\zeta}u_0(\zeta)\,d\zeta \tag{5}$$

(выбор нижнего предела в интеграле произволен).

§ 94. Ударные волны в релаксирующей среде

К значительному расширению ударной волны может привести наличие в газе сравнительно медленно протекающих релаксационных процессов — медленно протекающие химические реакции, замедленная передача энергии между различными