

$\partial/\partial t - c\partial/\partial x$ , который надо рассматривать как малый первого порядка: он обращает в ноль функцию  $\rho'(x, t)$  в ее линейном приближении. Поэтому мы получим уравнение для функции  $v(x, t)$  в требуемом приближении, просто заменив в (93,7)  $\rho'$  согласно линейному соотношению  $\rho' = -\rho cv$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_v v \frac{\partial v}{\partial x} = ac^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где

$$\alpha_v = \frac{c^4}{2V^3} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right)_s.$$

Величина  $\alpha_v$  безразмерна; для политропного газа  $\alpha_v = (\gamma + 1)/2$ .

2. Путем нелинейной подстановки привести уравнение Бюргерса (93,7а) к виду линейного уравнения теплопроводности (Е. Норф, 1950).

Решение. Подстановкой

$$u(\zeta, t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln \varphi(\zeta, t) \quad (1)$$

уравнение (93,7а) приводится к виду

$$2\mu \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\varphi} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = \varphi \frac{df(t)}{dt},$$

где посредством  $df/dt$  обозначена произвольная функция  $t$ . Переобозначением  $\varphi \rightarrow \varphi e^f$  (не меняющим искомой функции  $u(\zeta, t)$ ) это уравнение преобразуется к требуемому виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}. \quad (3)$$

Решение этого уравнения с начальным условием  $\varphi(\zeta, 0) = \varphi_0(\zeta)$  дается формулой (51,3):

$$\varphi(\zeta, t) = 2(\pi\mu t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\zeta') \exp \left\{ -\frac{(\zeta - \zeta')^2}{4\mu t} \right\} d\zeta'. \quad (4)$$

Начальная же функция  $\varphi_0(\zeta)$  связана с начальным значением искомой функции  $u(\zeta, t)$  равенством

$$\ln \varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\mu} \int_0^{\zeta} u_0(\zeta) d\zeta \quad (5)$$

(выбор нижнего предела в интеграле произволен).

## § 94. Ударные волны в релаксирующей среде

К значительному расширению ударной волны может привести наличие в газе сравнительно медленно протекающих релаксационных процессов — медленно протекающие химические реакции, замедленная передача энергии между различными

степенями свободы молекулы и т. п. (Я. Б. Зельдович, 1946)<sup>1)</sup>.

Пусть  $\tau$  — порядок величины времени релаксации. Как начальное, так и конечное состояния газа должны быть полностью равновесными; поэтому прежде всего ясно, что полная ширина ударной волны будет порядка величины  $\tau v_1$  — расстояния, пройденного газом в течение времени  $\tau$ . Кроме того, оказывается, что если интенсивность волны превышает определенный предел, то структура волны усложняется, в чем можно убедиться следующим образом.

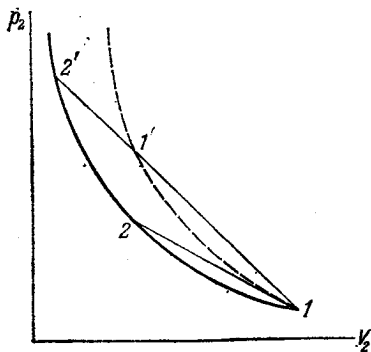


Рис. 67

На рис. 67 сплошной линией изображена ударная адиабата, проведенная через заданную начальную точку  $1$ , в предположении полной равновесности конечных состояний газа; наклон касательной к этой кривой в точке  $1$  определяется «равновесной»

скоростью звука, которую мы обозначали в § 81 посредством  $c_0$ . Пунктиром же изображена ударная адиабата, проведенная через ту же точку  $1$ , в предположении, что релаксационные процессы «заморожены» и не происходят вовсе; наклон касательной к этой кривой в точке  $1$  определяется значением скорости звука, которое было обозначено в § 81 как  $c_\infty$ .

Если скорость ударной волны такова, что  $c_0 < v_1 < c_\infty$ , то хорда  $12$  расположена так, как указано на рис. 67 нижним отрезком. В этом случае мы получим простое расширение ударной волны, причем все промежуточные состояния между начальным состоянием  $1$  и конечным  $2$  изображаются в плоскости  $p, V$  точками на отрезке  $12$ . Это следует из того, что (при пренебрежении обычными вязкостью и теплопроводностью) все последовательно проходимые газом состояния удовлетворяют уравнениям сохранения вещества  $\rho v = j = \text{const}$  и сохранения импульса  $p + j^2 V = \text{const}$  (ср. подробнее аналогичные соображения в § 129).

Если же  $v_1 > c_\infty$ , то хорда занимает положение  $11'2'$ . Все точки, лежащие на ее отрезке между точками  $1$  и  $1'$ , вообще не соответствуют каким-либо реальным состояниям газа; первой

<sup>1)</sup> Так, в двухатомных газах при температурах позади ударной волны порядка 1000—3000 К медленным релаксационным процессом является возбуждение внутримолекулярных колебаний. При более высоких температурах роль такого процесса переходит к термической диссоциации молекул на составляющие их атомы.

(после 1) реальной точкой является точка 1', отвечающая состоянию с вполне несмещенным относительно состояния 1 релаксационным равновесием. Сжатие газа от состояния 1 до состояния 1' совершается скачком, вслед за чем уже происходит (на расстояниях  $\sim v_1\tau$ ) постепенное сжатие до конечного состояния 2'

Если равновесная и неравновесная ударные адиабаты пересекаются (рис. 68), появляется возможность существования ударных волн еще одного типа: если скорость волны такова, что хорда 12 пересекает адиабаты выше точки их взаимного пересечения (как на рис. 68), то релаксация будет сопровождаться понижением давления — от значения, отвечающего точке 1' до значения, отвечающего точке 2 (С. П. Дьяков, 1954)<sup>1)</sup>.

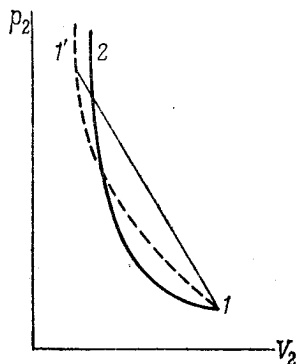


Рис. 68

### § 95. Изотермический скачок

Рассматривая в § 93 строение ударной волны, мы по существу предполагали, что коэффициенты вязкости и температуропроводности — величины одного порядка, как это обычно и бывает. Возможен, однако, и случай, когда  $\chi \gg \nu$ . Именно, если температура вещества достаточно высока, то в теплопроводности будет участвовать добавочный механизм — лучистая теплопроводность, осуществляемая находящимся в равновесии с веществом тепловым излучением. На вязкости же (т. е. на переносе импульса) наличие излучения сказывается в несравненно меньшей степени, в результате чего  $\nu$  и может оказаться малым по сравнению с  $\chi$ . Мы увидим сейчас, что наличие такого неравенства приводит к весьма существенному изменению структуры ударной волны.

Пренебрегая членами, содержащими вязкость, напишем уравнения (93,2) и (93,3), определяющие структуру переходного слоя, в виде

$$p + j^2V = p_1 + j^2V_1, \quad (95,1)$$

$$\frac{\kappa}{j} \frac{dT}{dx} = w + \frac{j^2V^2}{2} - w_1 - \frac{j^2V_1^2}{2}. \quad (95,2)$$

<sup>1)</sup> Такой случай мог бы, в принципе, иметь место в диссоциирующем многоатомном газе, если в равновесном состоянии за ударной волной достигается достаточно полная диссоциация его молекул на меньшие части. Диссоциация увеличивает значение отношения теплоемкостей  $\gamma$ , и тем самым уменьшает предельное сжатие в ударной волне, если только она уже настолько полна, что нагревание газа не требует заметной затраты энергии на продолжение диссоциации.