

§ 100. Разрывы в начальных условиях

Одной из важнейших причин возникновения поверхностей разрыва в газе могут являться разрывы в начальных условиях движения. Начальные условия (т. е. начальные распределения скорости, давления и т. п.) могут быть заданы, вообще говоря, произвольным образом. В частности, эти начальные распределения отнюдь не должны быть непременно везде непрерывными функциями и могут испытывать разрывы на некоторых поверхностях. Так, если в некоторый момент времени привести в соприкосновение две массы газа, сжатые до различных давлений, то поверхность их соприкосновения будет поверхностью разрыва в начальном распределении давления.

Существенно, что скачки различных величин в разрывах начальных условий (или, как мы будем говорить, в начальных разрывах) могут быть совершенно произвольными; между ними не должно существовать никаких соотношений. Между тем, мы знаем, что на поверхности разрывов, которые могут существовать в газе в качестве устойчивых образований, должны соблюдаться определенные условия; так, скачки плотности и давления в ударной волне связаны друг с другом ударной адиабатой. Поэтому ясно, что если в начальном разрыве эти необходимые условия не соблюдаются, то в дальнейшем он во всяком случае не сможет продолжать существовать как таковой. Вместо этого начальный разрыв, вообще говоря, распадается на несколько разрывов, каждый из которых является каким-нибудь из возможных типов разрывов (ударная волна, тангенциальный разрыв, слабый разрыв); с течением времени эти возникшие разрывы будут отходить друг от друга¹⁾.

В течение малого промежутка времени, начиная от начального момента $t = 0$, разрывы, на которые распадается начальный разрыв, еще не успеют разойтись на большие расстояния друг от друга, и потому вся исследуемая картина движения будет ограничена сравнительно узким объемом, прилегающим к поверхности начального разрыва. Как обычно, достаточно рассматривать в общем случае отдельные участки поверхности начального разрыва, каждый из которых можно считать плоским. Поэтому можно ограничиться рассмотрением плоской поверхности разрыва. Мы выберем эту плоскость в качестве плоскости y, z . Из соображений симметрии очевидно, что разрывы, на которые распадется начальный разрыв при $t > 0$, будут тоже плоскими и перпендикулярными к оси x . Вся картина движения будет зависеть только от одной координаты x (и времени), так что задача сводится к одномерной. Благодаря отсутствию каких бы то ни было характеристических параметров длины и вре-

¹⁾ Общее исследование этого вопроса дано *Н. Е. Кочиным* (1926).

мени, задача автомодельна, и мы можем воспользоваться полученными в предыдущем параграфе результатами.

Разрывы, возникающие при распаде начального разрыва, должны, очевидно, двигаться от места их образования, т. е. от места нахождения начального разрыва. Легко видеть, что при этом в каждую из двух сторон (в положительном и отрицательном направлениях оси x) может двигаться либо одна ударная волна, либо одна пара слабых разрывов, ограничивающих волну разрежения. Действительно, если бы, скажем, в положительном направлении оси x распространились две образовавшиеся в одном и том же месте в момент $t = 0$ ударные волны, то передняя из них должна была бы двигаться со скоростью большей, чем скорость задней волны. Между тем согласно общим свойствам ударных волн первая должна двигаться относительно остающегося за ней газа со скоростью, меньшей скорости звука c в этом газе, а вторая должна двигаться относительно того же газа со скоростью, превышающей ту же величину c (в области между двумя ударными волнами $c = \text{const}$), т. е. должна догонять первую. По такой же причине не могут следовать друг за другом в одну и ту же сторону ударная волна и волна разрежения (достаточно заметить, что слабые разрывы движутся относительно газов впереди и позади них со звуковой скоростью). Наконец, две одновременно возникшие волны разрежения не могут разойтись, так как скорость заднего фронта первой равна скорости заднего фронта второй.

Наряду с ударными волнами и волнами разрежения при распаде начального разрыва должен, вообще говоря, возникнуть так же и тангенциальный разрыв. Такой разрыв во всяком случае необходим, если в начальном разрыве испытывали скачок поперечные компоненты скорости v_y , v_z . Поскольку эти компоненты скорости не меняются ни в ударной волне, ни в волне разрежения, то их скачок будет всегда происходить на тангенциальном разрыве, остающемся на том же месте, где находился начальный разрыв; с каждой стороны от этого разрыва v_y , v_z будут оставаться постоянными (в действительности, конечно, благодаря неустойчивости тангенциального разрыва со скачком скорости он, как всегда, с течением времени размоется в турбулентную область).

Тангенциальный разрыв, однако, должен возникнуть даже и в том случае, когда v_y , v_z не имеют скачка в начальном разрыве (не ограничивая общности, можно считать в этом случае, что постоянные v_y и v_z равны нулю, что и будет подразумеваться ниже). Это показывают следующие соображения. Возникающие в результате распада разрывы должны дать возможность перейти от заданного состояния 1 газа с одной стороны начального разрыва к заданному состоянию 2 с другой стороны. Состояние газа определяется тремя независимыми величинами, например,

p , ρ и $v_x = v$. Поэтому необходимо иметь в распоряжении три произвольных параметра для того, чтобы посредством некоторого набора разрывов перейти, скажем, от состояния 1 к произвольно заданному состоянию 2. Но мы знаем, что ударная волна (перпендикулярная к направлению потока), распространяющаяся по газу, термодинамическое состояние которого задано, полностью определяется одним параметром (§ 85). То же самое относится к волне разрежения (как видно из формул (99,14—16), при заданном состоянии входящего в волну разрежения газа состояние выходящего газа полностью определится заданием одной из величин в нем). С другой стороны, мы видели, что в результате распада в каждую сторону может пойти не более одной волны — ударной или разрежения. Таким образом, мы будем иметь в нашем распоряжении всего два параметра, что недостаточно.

Возникающий на месте начального разрыва тангенциальный разрыв как раз и представляет этот недостающий третий параметр. На этом разрыве остается непрерывным давление; плотность же (а с ней и температура, энтропия) испытывает скачок. Тангенциальный разрыв неподвижен относительно газа по обеим его сторонам, и потому к нему не относятся использованные выше соображения о взаимном обгоне двух распространяющихся в одном направлении волн.

Газы, находящиеся по обе стороны тангенциального разрыва, не перемешиваются друг с другом, так как движения газа через тангенциальный разрыв нет; во всех перечисленных ниже вариантах эти газы могут быть даже газами различных веществ.

На рис. 78 схематически изображены все возможные типы распада начального разрыва. Сплошной линией изображен ход изменения давления вдоль оси x (изменение плотности изобразилось бы линией такого же характера, с той лишь разницей, что имелся бы скачок также и на тангенциальном разрыве). Вертикальные отрезки изображают образовавшиеся разрывы, а

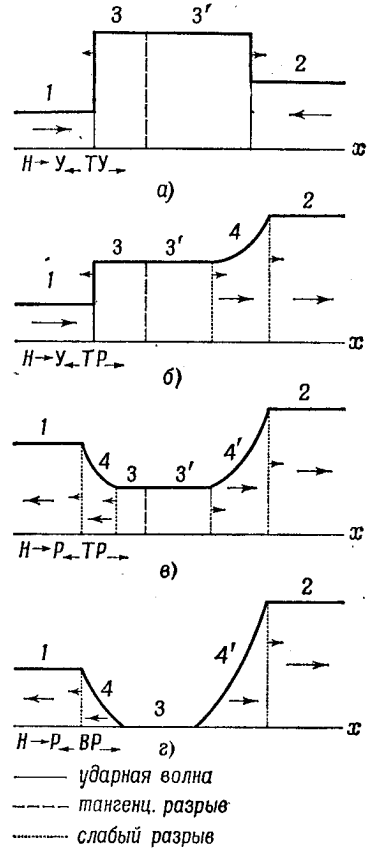


Рис. 78

стрелками указаны направления их распространения и направления движения газа. Система координат выбрана везде та, в которой тангенциальный разрыв покоится; вместе с ним покоится также и газ в прилегающих к нему областях $3, 3'$. Давления, плотности и скорости газов в крайних слева и справа областях 1 и 2 — это те значения соответствующих величин, которые они имеют в момент времени $t = 0$ на обеих сторонах начального разрыва.

В первом случае (который мы условно записываем в виде $H \rightarrow Y \leftarrow TU \rightarrow$, рис. 78, а) из начального разрыва H возникают две ударные волны Y , распространяющиеся в противоположные стороны, и расположенный между ними тангенциальный разрыв T . Этот случай осуществляется при столкновении двух масс газа, движущихся с большой скоростью навстречу друг другу.

В случае $H \rightarrow Y \leftarrow TP \rightarrow$ (рис. 78, б) по одну сторону от тангенциального разрыва распространяется ударная волна, а по другую — волна разрежения P . Этот случай осуществляется, например, если в начальный момент времени приводятся в соприкосновение две неподвижные друг относительно друга массы газа ($v_2 - v_1 = 0$), сжатые до различных давлений. Действительно, из всех четырех случаев, изображенных на рис. 78, только во втором из них газы 1 и 2 движутся в одинаковом направлении и потому может быть $v_1 = v_2$.

Далее, в третьем случае ($H \rightarrow P \leftarrow TP \rightarrow$) в обе стороны от тангенциального разрыва распространяются по волне разрежения. Если газы 1 и 2 разлетаются друг от друга с достаточно большой скоростью $v_2 - v_1$, то в волнах разрежения давление может достичь при своем падении значения нуля. Тогда возникает картина, изображенная на рис. 78, г; между областями 4 и $4'$ образуется область вакуума 3 .

Выведем аналитические условия, определяющие характер распада начального разрыва в зависимости от его параметров. Будем считать во всех случаях, что $p_2 > p_1$, а положительное направление оси x выбираем везде в направлении от области 1 к области 2 (в соответствии с рис. 78).

Имея в виду, что газы по обеим сторонам начального разрыва могут быть газами различных веществ, будем различать их, называя соответственно газами 1 и 2 .

1. Распад $H \rightarrow Y \leftarrow TU \rightarrow$. Если $p_3 = p'_3$, $v_3 = v'_3$, V_3, V'_3 — давление, скорость и удельные объемы в образовавшихся после распада областях 3 и $3'$, то имеем $p_3 > p_2 > p_1$, а объемы V_3 и V'_3 определяются как абсциссы точек с ординатами p_3 на ударных адиабатах, проведенных соответственно через точки p_1, V_1 и p_2, V_2 в качестве исходных. Поскольку газы в областях 3 и $3'$ в выбранной системе координат неподвижны, то согласно формуле (85,7) можно написать для скоростей v_1 и v_2 , направ-

ленных соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси x :

$$v_1 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)}, \quad v_2 = -\sqrt{(p_3 - p_2)(V_3 - V_3')}.$$

Наименьшее значение, которое может иметь давление p_3 при заданных p_1 и p_2 так, чтобы не противоречить исходному предположению ($p_3 > p_2 > p_1$), есть $p_3 = p_2$. Имея также в виду, что разность $v_1 - v_2$ есть монотонно возрастающая функция p_3 , находим искомое неравенство

$$v_1 - v_2 > \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V')}, \quad (100,1)$$

где посредством V' обозначен объем, являющийся абсциссой точки с ординатой p_2 на ударной адиабате газа 1, проведенной через точку p_1, V_1 в качестве начальной. Вычислив V' по формуле (89,1) (написав в ней V' вместо V_2), получим для политропного газа условие (100,1) в виде

$$v_1 - v_2 > (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}. \quad (100,2)$$

Отметим, что условия (100,1—2), устанавливающие границу возможных значений разности скоростей $v_1 - v_2$, не зависят, очевидно, от выбора системы координат.

2. Распад $H \rightarrow Y \leftarrow TP \rightarrow$. Здесь $p_1 < p_3 = p'_3 < p_2$. Для скорости газа в области 1 имеем опять:

$$v_1 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)},$$

а полное изменение скорости в волне разрежения 4 равно согласно (99,7)

$$v_2 = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-dp dV}.$$

При заданных p_1 и p_2 значения p_3 могут лежать в пределах от p_1 до p_2 . Заменяя p_3 в разности $v_2 - v_1$ один раз на p_1 , а другой — на p_2 , получим условие

$$-\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-dp dV} < v_1 - v_2 < \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V')}. \quad (100,3)$$

Здесь V' имеет тот же смысл, что и в предыдущем случае; выражение, определяющее верхний предел разности $v_1 - v_2$, должно вычисляться для газа 1, а нижний предел — для газа 2. Для политропного газа получим:

$$\begin{aligned} -\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} \right] &< v_1 - v_2 < \\ &< (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}, \end{aligned} \quad (100,4)$$

где $c_2 = \sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$ — скорость звука в газе 2 в состоянии p_2, V_2 .

3. Распад $H \rightarrow P \leftarrow TP \rightarrow$. Здесь $p_2 > p_1 > p_3 = p'_3 > 0$. Тем же путем найдем следующее условие осуществления этого случая:

$$-\int_0^{p_1} \sqrt{-dp dV} - \int_0^{p_2} \sqrt{-dp dV} < v_1 - v_2 < -\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-dp dV}. \quad (100,5)$$

Интеграл в правой стороне неравенства вычисляется для газа 2, а в левой стороне первый интеграл — для газа 1, а второй — для газа 2. Для политропного газа получим:

$$-\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} < v_1 - v_2 < -\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} \right], \quad (100,6)$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma_1 p_1 V_1}$, $c_2 = \sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$. Если

$$v_1 - v_2 < -\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1}, \quad (100,7)$$

то между волнами разрежения возникает область вакуума (распад $H \rightarrow P \leftarrow BP \rightarrow$).

К задаче о разрыве в начальных условиях сводятся, в частности, задачи о различных столкновениях плоских поверхностей разрывов. В момент столкновения обе плоскости совпадают и представляют собой некоторый «начальный разрыв», в дальнейшем распадающийся одним из описанных выше способов. Так, в результате столкновения двух ударных волн снова возникают две ударные же волны, расходящиеся от остающегося между ними тангенциального разрыва:

$$U \rightarrow U \leftarrow \rightarrow U \leftarrow TU \rightarrow.$$

Когда одна ударная волна догоняет другую, возможны два случая:

$$U \rightarrow U \rightarrow \rightarrow U \leftarrow TU \rightarrow, \quad U \rightarrow U \rightarrow \rightarrow P \leftarrow TU \rightarrow.$$

В обоих случаях вперед продолжает распространяться ударная же волна.

К этой же категории относится задача об отражении и прохождении ударной волны через тангенциальный разрыв (градиенту двух сред). Здесь возможны два случая:

$$U \rightarrow T \rightarrow \rightarrow U \leftarrow TU \rightarrow, \quad U \rightarrow T \rightarrow \rightarrow P \leftarrow TU \rightarrow.$$

Прошедшая во вторую среду волна всегда является ударной (см. также задачи к этому параграфу)¹⁾.

¹⁾ Для полноты упомянем, что при столкновении ударной волны со слабым разрывом (эта задача не относится к рассматриваемому здесь автоматическому типу) ударная волна продолжает распространяться в прежнем направлении, а в пространстве позади нее остается один слабый разрыв первоначального типа и один «тангенциальный» (см. конец § 96) слабый разрыв.

Задачи

1. Плоская ударная волна отражается от плоской поверхности абсолютно твердого тела. Определить давление газа позади отраженной волны. (*Н. Hugoniot, 1885*).

Решение. В результате падения ударной волны на твердую стенку возникает отраженная ударная волна, распространяющаяся от стенки. Будем отмечать индексами 1, 2, 3 соответственно невозмущенный газ перед падающей ударной волной, газ позади падающей волны (он же является газом впереди отраженной волны) и газ позади отраженной волны (рис. 79; стрелками показано направление движения ударных волн и самого газа). Газ в граничащих с твердой стенкой областях 1 и 3 покоится (относительно неподвижной стенки). Поэтому относительная скорость газов по обе стороны разрыва друг относительно друга в обоих случаях — в падающей и отраженной ударных волнах — одинакова (равна одной и той же величине — скорости газа 2). Воспользовавшись формулой (85,7) для относительной скорости, получим поэтому:

$$(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3).$$

Уравнение же ударной адиабаты (89,1) для каждой из ударных волн дает

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2},$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_3}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_3}.$$

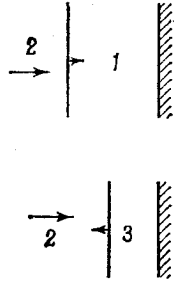


Рис. 79

Из этих трех уравнений можно исключить удельные объемы, в результате чего получается:

$$(p_3 - p_2)^2 [(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2] = (p_2 - p_1)^2 [(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2].$$

Это есть квадратное уравнение для p_3 , имеющее тривиальный корень $p_3 = p_1$; после сокращения на $(p_3 - p_1)$ получим искомую формулу

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma - 1)p_2 - (\gamma - 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1},$$

определяющую p_3 по p_1 и p_2 . В предельном случае большой интенсивности падающей волны «досжатие» газа отраженной ударной волной определяется формулами

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

В обратном предельном случае малой интенсивности: $p_3 - p_2 = p_2 - p_1$, что соответствует звуковому приближению.

2. Найти условие, определяющее результат отражения ударной волны от плоской границы между двумя газами.

Решение. Пусть $p_1 = p_2'$, V_1, V_2' — давления и удельные объемы обеих сред до падения ударной волны (распространяющейся в газе 2) на их поверхность раздела, а p_2, V_2 — давление и удельный объем позади ударной волны. Условие того, чтобы отраженная волна была ударной, определяется неравенством (100,2), в котором надо в данном случае положить

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_2')(V_2' - V_2)}.$$

Выражая все величины через отношение давлений p_2/p_1 и начальные удельные объемы V_1 и V'_2 , получим следующее условие:

$$\frac{V_1}{(\gamma_1 + 1) p_2/p_1 + (\gamma_1 - 1)} < \frac{V'_2}{(\gamma_2 + 1) p_2/p_1 + (\gamma_2 - 1)}.$$

§ 101. Одномерные бегущие волны

При изучении звуковых волн в § 64 амплитуда колебаний в волне предполагалась малой. В результате уравнения движения оказывались линейными и могли быть легко решены. Решением этих уравнений является, в частности, функция от $x \pm ct$ (плоская волна), что соответствует бегущей волне с профилем, перемещающимся со скоростью c без изменения своей формы (под профилем волны понимают распределение различных величин — плотности, скорости и т. п. — вдоль направления ее распространения). Поскольку скорость v , плотность ρ и давление p (как и другие величины) в такой волне являются функциями от одной и той же комбинации $x \pm ct$, то они могут быть выражены как функции друг от друга в виде соотношений, не содержащих явно ни координаты, ни времени (например, $p = p(\rho)$, $v = v(\rho)$ и т. д.).

В случае произвольной, не малой, амплитуды волны эти простые соотношения уже не имеют места. Оказывается, однако, возможным найти общее решение точных уравнений движения, представляющее собой бегущую плоскую волну и являющееся обобщением решения $f(x \pm ct)$ приближенных уравнений, применимых в случае малых амплитуд. Для отыскания этого решения будем исходить из требования, чтобы в общем случае волны с произвольной амплитудой плотность и скорость могли быть выражены в виде функции друг от друга.

При отсутствии ударных волн движение адиабатично. Если в некоторый начальный момент времени газ был однороден (так что, в частности, было $s = \text{const}$), то и в дальнейшем будет все время $s = \text{const}$, что и предполагается ниже; тогда и давление будет функцией только от плотности.

В плоской звуковой волне, распространяющейся вдоль оси x , все величины зависят только от x и t , а для скорости имеем $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0,$$

а уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$