Выражая все величины через отношение давлений p_2/p_1 и начальные удельные объемы V_1 и V_2', получим следующее условие:

$$\frac{V_1}{(\gamma_1+1)\,p_2/p_1+(\gamma_1-1)}<\frac{V_2'}{(\gamma_2+1)\,p_2/p_1+(\gamma_2-1)}.$$

§ 101. Одномерные бегущие волны

При изучении звуковых волн в § 64 амплитуда колебаний в волне предполагалась малой. В результате уравнения движения оказывались линейными и могли быть легко решены. Решением этих уравнений является, в частности, функция от $x \pm ct$ (плоская волна), что соответствует бегущей волне с профилем, перемещающимся со скоростью c без изменения своей формы (под профилем волны понимают распределение различных величин — плотности, скорости и т. п. — вдоль направления ее распространения). Поскольку скорость v, плотность ρ и давление p (как и другие величины) в такой волне являются функциями от одной и той же комбинации $x \pm ct$, то они могут быть выражены как функции друг от друга в виде соотношений, не содержащих явно ни координаты, ни времени (например, $p = p(\rho)$, $v = v(p)$ и т. д.).

В случае произвольной, не малой, амплитуды волны эти простые соотношения уже не имеют места. Оказывается, однако, возможным найти общее решение точных уравнений движения, представляющее собой бегущую плоскую волну и являющееся обобщением решения $f(x \pm ct)$ приближенных уравнений, применимых в случае малых амплитуд. Для отыскания этого решения будем исходить из требования, чтобы в общем случае волны с произвольной амплитудой плотность и скорость могли быть выражены в виде функции друг от друга.

При отсутствии ударных волн движение адиабатично. Если в некоторый начальный момент времени газ был однороден (так что, в частности, было $s = \mathrm{const}$), то и в дальнейшем будет все время $s = \mathrm{const}$, что и предполагается ниже; тогда и давление будет функцией только от плотности.

В плоской звуковой волне, распространяющейся вдоль оси x, все величины зависят только от x и t, а для скорости имеем $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0,$$

а уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0.$$

Воспользовавшись тем, что v может быть представлено в виде функции только от ρ, напишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{d(\rho v)}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0, \tag{101,1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\left(v+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{101,2}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial\rho/\partial t}{\partial\rho/\partial x}=-\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho,$$

получаем из (101,1)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho=\frac{d(\rho v)}{d\rho}=v+\rho\frac{dv}{d\rho},$$

а из (101,2) аналогично

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v=v+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}. \tag{101,3}$$

Но поскольку значение ρ определяет однозначным образом значение v, то безразлично, берется ли производная при постоянном ρ или v, так что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v,$$

откуда

$$\rho\frac{dv}{d\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}=\frac{c^2}{\rho}\frac{d\rho}{dv}.$$

Таким образом, $dv/d\rho=\pm c/\rho$, откуда

$$v=\pm\int\frac{c}{\rho}\,d\rho=\pm\int\frac{dp}{\rho c}. \tag{101,4}$$

Этим определяется общая связь между скоростью и плотностью или давлением в волне[1]).

Далее, комбинируя (101,3) с (101,4), пишем:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v=v+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}=v\pm c(v),$$

или, интегрируя,

$$x=t\,[v\pm c(v)]+f(v), \tag{101,5}$$

где $f(v)$ — произвольная функция скорости, а функция $c(v)$ определяется равенством (101,4).

Формулы (101,4—5) представляют собой искомое общее решение (впервые найденное *Риманом* — *B. Riemann*, 1860). Ука-

[1]) В волне с малой амплитудой имеем $\rho=\rho_0+\rho'$, и (101,4) дает в первом приближении $v=c_0\rho'/\rho_0$ (где $c_0=c(\rho_0)$), т. е. обычную формулу (64,12).

занные формулы определяют неявным образом скорость (а с нею и остальные величины) как функцию от x и t, т. е. профиль волны в каждый момент времени. Для каждого определенного значения v имеем $x = at + b$, т. е. точка, в которой скорость имеет определенное значение, передвигается в пространстве с постоянной скоростью; в этом смысле найденное решение представляет собой бегущую волну. Два знака в (101,5) соответствуют волнам, распространяющимся (относительно газа) в положительном и отрицательном направлениях оси x.

Движение, описываемое решением (101,4—5) часто называют *простой волной*; ниже мы будем пользоваться этим термином. Изученное в § 99 автомодельное движение является частным случаем простой волны, соответствующим равной нулю функции $f(v)$ в (101,5).

Выпишем в явном виде соотношения для простой волны в политропном газе; для определенности будем считать, что в волне есть точка, в которой $v = 0$, как это обычно бывает в различных конкретных задачах. Поскольку формула (101,6) совпадает с формулой (99,6), то аналогично формулам (99,14—16) имеем:

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma - 1}{2} v, \tag{101,6}$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, \quad p = p_0 \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \tag{101,7}$$

Подставляя (101,6) в (101,5), получим:

$$x = t\left(\pm c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v\right) + f(v). \tag{101,8}$$

Иногда бывает удобным писать это решение в виде

$$v = F\left[x - \left(\pm c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v\right) t\right], \tag{101,9}$$

где F — опять произвольная функция.

Из формул (101,6—7) снова (как и в § 99) видно, что скорость, направленная в сторону, противоположную направлению распространения волны (относительно самого газа), ограничена по своей абсолютной величине; для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, имеем:

$$-v \leqslant \frac{2c_0}{\gamma - 1}. \tag{101,10}$$

Бегущая волна, описываемая формулами (101,4—5), существенно отличается от волны, получающейся в предельном случае малых амплитуд. Скорость, с которой перемещаются точки профиля волны, равна

$$u = v \pm c; \tag{101.11}$$

ее можно рассматривать наглядно как результат наложения распространения возмущения относительно газа со звуковой скоростью и перемещения самого газа со скоростью v. Скорость u является теперь функцией плотности и поэтому различна для разных точек профиля. Таким образом, в общем случае плоской волны произвольной амплитуды не существует определенной постоянной скорости волны. Благодаря различию в скоростях точек профиля волны последний не остается неизменным и меняет со временем свою форму.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x; для нее $u = v + c$. В § 99 была вычислена производная от $v + c$ по плотности (см. (99,10)). Мы видели, что $du/d\rho > 0$. Таким образом, скорость распространения заданной точки профиля волны тем больше, чем больше плотность. Если обозначить посредством c_0 скорость звука для плотности, равной равновесной плотности ρ_0, то в местах, где имеется сжатие, $\rho > \rho_0$ и $c > c_0$; в точках разрежения, напротив, $\rho < \rho_0$ и $c < c_0$.

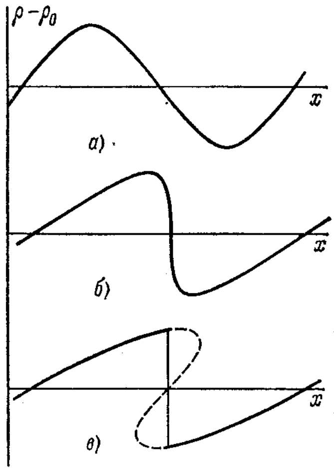

Рис. 80

Неодинаковость скорости перемещения точек профиля приводит к изменению его формы со временем: точки сжатия выдвигаются вперед, а точки разрежения оказываются отставшими (рис. 80, *б*). В конце концов профиль волны может настолько выгнуться, что кривая $\rho(x)$ (при заданном t) оказывается неоднозначной — некоторым x соответствует по три различных значения ρ (рис. 80, *в*, пунктирная линия)[1]. Физически, разумеется, такое положение невозможно. В действительности, в местах неоднозначности ρ возникают разрывы, в результате чего ρ оказывается везде (за исключением самих точек разрыва) однозначной функцией. Профиль волны приобретает при этом вид, изображенный на рис. 80, *в* сплошной линией. Поверхности разрыва возникают, таким образом, на протяжении каждой длины волны.

После возникновения разрывов волна перестает быть простой. Наглядная причина этого заключается в том, что при наличии поверхностей разрыва происходит отражение волны от

[1]) О такой деформации профиля волны часто говорят как о его *опрокидывании*.

этих поверхностей, в результате чего волна перестает быть бегущей в одном направлении, а потому и лежащее в основе всего вывода предположение об однозначной зависимости между различными величинами не имеет, вообще говоря, места.

Наличие разрывов (ударных волн) приводит, как было указано в § 85, к диссипации энергии. Поэтому возникновение разрывов приводит к сильному затуханию волны. Наличие такого затухания видно уже непосредственно из рис. 80. При возникновении разрыва как бы отсекается наиболее высокая часть профиля волны. С течением времени, по мере продолжающегося выгибания профиля, его вышина все более уменьшается. Происходит сглаживание профиля с уменьшением его амплитуды, что и означает постепенное затухание волны.

Из сказанного выше ясно, что образование в конце концов разрывов должно произойти во всякой простой волне, в которой имеются участки, на которых плотность убывает в направлении распространения волны. Единственный случай, когда разрывы вообще не образуются, — волна, в которой плотность монотонно возрастает в направлении распространения на всем ее протяжении (такова, например, волна, возникающая при выдвигании поршня из заполненной газом бесконечной трубы; см. задачи к этому параграфу).

Хотя после образования разрыва волна и перестает быть простой, но самые момент и место образования разрыва могут быть определены аналитически. Мы видели, что с математической точки зрения возникновение разрывов связано с тем, что в простой волне величины p, ρ, v как функции x (при заданном t) становятся многозначными для моментов времени, превышающих некоторое определенное значение t_0, между тем как при $t < t_0$ эти функции однозначны. Момент t_0 есть момент образования разрыва. Уже из чисто геометрических соображений ясно, что в самый момент t_0 кривая зависимости, скажем, v от x, должна сделаться в некоторой точке $x = x_0$ вертикальной — как раз в той точке, вблизи которой функция стала бы затем многозначной. Аналитически это означает обращение производной $(\partial v/\partial x)_t$ в бесконечность, т. е. производной $(\partial x/\partial v)_t$ в нуль. Ясно также, что в момент t_0 кривая $v = v(x)$ должна лежать по обе стороны от вертикальной касательной, в противном случае зависимость $v(x)$ была бы многозначной уже и в этот момент времени. Другими словами, точка $x = x_0$ должна быть не точкой экстремума функции $x(v)$, а точкой перегиба, и следовательно, должна обратиться в нуль также и вторая производная $(\partial^2 x/\partial v^2)_t$. Таким образом, место и момент образования ударной волны определяются совместным решением двух уравнений:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_t = 0. \tag{101,12}$$

Для политропного газа эти уравнения гласят:

$$t = -\frac{2}{\gamma+1} f'(v), \qquad f''(v) = 0, \tag{101,13}$$

где $f(v)$ — функция, входящая в общее решение (101,8).

Эти условия должны быть видоизменены, если простая волна граничит с неподвижным газом и ударная волна возникает как раз на этой границе. И здесь в момент возникновения разрыва кривая $v = v(x)$ должна стать вертикальной, т. е. производная $(\partial x/\partial v)_t$ должна обратиться в нуль. Обращение же в нуль второй производной не обязательно; вторым условием здесь является просто равенство нулю скорости на границе с неподвижным газом, так что имеем условие

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t \bigg|_{v=0} = 0.$$

Из этого условия время и место образования разрыва могут быть найдены в явном виде. Дифференцируя выражение (101,5), получим:

$$t = -\frac{f'(0)}{\alpha_0}, \qquad x = \pm c_0 t + f(0), \tag{101,14}$$

где α_0 — значение при $v = 0$ величины α, определяемой формулой (102,2). Для политропного газа

$$t = -\frac{2f'(0)}{\gamma+1}. \tag{101,15}$$

Задачи

1. Газ находится в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны ($x > 0$) и закрытой поршнем с другой ($x = 0$). В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться равноускоренно со скоростью $U = \pm at$. Определить возникающее движение газа (считая газ политропным).

Решение. Если поршень выдвигается из трубы ($U = -at$), то возникает простая волна разрежения, передний фронт которой распространяется вправо по неподвижному газу со скоростью c_0; в области $x > c_0 t$ газ неподвижен. На поверхности поршня скорость газа должна совпадать со скоростью поршня, т. е. должно быть $v = -at$ при $x = -at^2/2$, $t > 0$. Это условие дает для функции $f(v)$ в (101,8):

$$f(-at) = -c_0 t + \frac{\gamma a t^2}{2}.$$

Поэтому имеем:

$$x - \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v\right) t = f(v) = \frac{c_0}{a} v + \frac{\gamma}{2a} v^2,$$

откуда

$$-v = \frac{1}{\gamma}\left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} at\right) - \frac{1}{\gamma}\left[\left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} at\right)^2 - 2a\gamma(c_0 t - x)\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Эта формула определяет изменение скорости в области от поршня до переднего фронта волны $x = c_0 t$ (рис. 81, a) в течение времени от $t = 0$ до

$t = 2c_0/(\gamma - 1)a$. Скорость газа направлена везде влево, в сторону движения поршня, и монотонно убывает по абсолютной величине в положительном направлении оси x; в этом же направлении монотонно возрастают плотность и давление. При $t > 2c_0/(\gamma-1)a$ для скорости поршня не выполняется неравенство (101,10), а потому газ не может двигаться вместе с ним. Между поршнем и газом возникнет область вакуума, а дальше скорость газа будет меняться по формуле (1) от значения $-2c_0/(\gamma-1)$ до нуля.

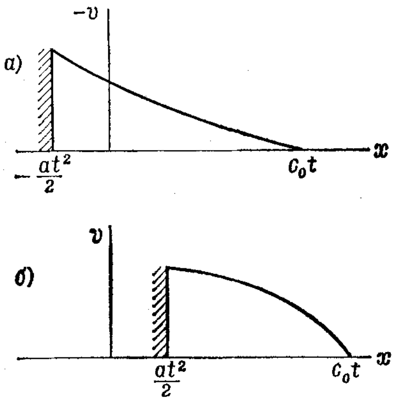

Рис. 81

Если поршень вдвигается в трубу ($U = at$), то возникает простая волна сжатия; соответствующее решение получается просто изменением знака у a в формуле (1) (рис. 81, б). Оно применимо, однако, лишь до момента образования ударной волны; этот момент определяется по формуле (101,15) и равен

$$t = \frac{2c_0}{a(\gamma+1)}.$$

2. То же при произвольном законе движения поршня.

Решение. Пусть поршень в момент $t = 0$ начинает двигаться по закону $x = X(t)$ (причём $X(0) = 0$); его скорость $U = X'(t)$. Граничное условие на поршне ($v = U$ при $x = X$) дает

$$v = X'(t), \quad f(v) = X(t) - t\left[c_0 + \frac{\gamma+1}{2}X'(t)\right].$$

Если рассматривать теперь t как параметр, то эти два уравнения определяют в параметрическом виде функцию $f(v)$. Обозначая ниже этот параметр посредством τ, можем написать окончательное решение в виде

$$v = X'(\tau),$$
$$x = X(\tau) + (t-\tau)\left[c_0 + \frac{\gamma+1}{2}X'(\tau)\right], \tag{2}$$

чем и определяется в параметрическом виде искомая функция $v(t, x)$ в возникающей при движении поршня простой волне.

3. Определить время и место образования ударной волны при движении поршня по закону $U = at^n$, $n > 0$.

Решение. Если $a < 0$, т. е. поршень выдвигается из трубы, то возникает простая волна разрежения, в которой ударные волны вообще не образуются. Ниже предполагается $a > 0$, т. е. поршень вдвигается в трубу, создавая простую волну сжатия.

При параметрическом задании функции $v(x, t)$ формулами (2) с

$$X = \frac{a}{n+1}\tau^{n+1},$$

момент и место образования ударной волны определяются уравнениями:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_t = -c_0 + t\tau^{n-1}an\frac{\gamma+1}{2} - \frac{a\tau^n}{2}[\gamma - 1 + n(\gamma+1)] = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2}\right)_t = t\tau^{n-2}an(n-1)\frac{\gamma+1}{2} - \frac{an}{2}\tau^{n-1}[\gamma - 1 + n(\gamma+1)] = 0, \tag{3}$$

причем второе уравнение надо заменить просто равенством $\tau = 0$, если речь идет об образовании разрыва на переднем фронте простой волны.

При $n = 1$ находим:

$$\tau = 0, \quad t = \frac{2c_0}{a(\gamma+1)},$$

т. е. ударная волна образуется на переднем фронте через конечное время после начала движения, в согласии с результатом задачи 1.

При $n < 1$ производная $(\partial x/\partial\tau)_t$ как функция от τ оказывается знакопеременной (а потому функция $v(x)$ при заданном t — многозначной) уже при всяком $t > 0$. Это значит, что ударная волна образуется на поршне уже в самый момент начала его движения.

При $n > 1$ ударная волна возникает не на переднем фронте простой волны, а в некоторой промежуточной точке, определяемой уравнениями (3). Определив из (3) значения τ и t, можно затем по (2) найти и место образования разрыва. Вычисление дает

$$t = \left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n} \frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{n+1}{n-1}\gamma + 1\right]^{(n-1)/n},$$

$$x = 2c_0\left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n}\left[\frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{n-1}{n+1}\right]\frac{1}{(n-1)^{(n-1)/n}\,[\gamma - 1 + n(\gamma+1)]^{1/n}}.$$

4. Для плоской волны малой амплитуды (звук) определить средние по времени значения величин в квадратичном по амплитуде приближении. Волна излучается поршнем, колеблющимся по некоторому закону $x = X(t)$, $U = X'(t)$, причем $X(0) = 0$, $\bar{X} = 0$, $\bar{U} = 0$[1].

Решение. Исходим из точного решения (101,9), записав его в эквивалентном виде, с другим выбором аргумента:

$$v = F\left(t - \frac{x}{u}\right), \quad u = c_0 + \alpha_0 v \tag{4}$$

(где $\alpha_0 = (\gamma+1)/2$), или $v = F(\xi)$, где переменная ξ определяется в неявном виде уравнением[2])

$$\xi = t - x/u(\xi). \tag{5}$$

Покажем, что при вычислении с точностью до величин второго порядка усреднение по t эквивалентно усреднению по ξ. При заданном x имеем

$$dt = d\xi\left(1 - \frac{x}{u^2}\frac{du}{d\xi}\right) \approx d\xi\left(1 - \frac{x\alpha_0}{c_0^2}\frac{dv}{d\xi}\right)$$

(в знаменателе u^2 можно пренебречь малой величиной $v \ll c_0$; искомый эффект, связанный с накапливающимися нелинейными искажениями профиля, получается в результате разрешения уравнения (4) относительно v). Поэтому

$$\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{F - \frac{x\alpha_0}{c_0^2}F\frac{dF}{d\xi}\right\}d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F\,d\xi - \frac{x\alpha_0}{c_0^2}\,[F^2(\xi_2) - F^2(\xi_1)].$$

---

[1]) В решении этой задачи мы следуем *Л. А. Островскому* (1968).

[2]) Для волн малой амплитуды решение (4) справедливо и для произвольного (не политропного) газа, если определить α_0 согласно (102,2).

Второй член всегда конечен и не дает вклада при усреднении по большому интервалу времени. Заметив также, что

$$\xi_2 - \xi_1 \approx t_2 - t_1 + \frac{\alpha_0 x}{c_0^2}(v_2 - v_1) \approx t_2 - t_1,$$

приходим к требуемому результату $\bar{v}^t = \bar{v}^\xi$, где индекс у черты указывает переменную, по которой производится усреднение (ниже этот индекс опускаем); отметим, что среднее (по t) значение оказывается тем самым независящим от x.

Для задачи о колеблющемся поршне функция $F(\xi)$ определяется уравнением (2), которое можно переписать в виде

$$v(\tau) = X'(\tau), \quad \tau = \xi + X(\tau)/u(\tau)$$

или, ввиду малости амплитуды колебаний:

$$\tau \approx \xi + \frac{1}{c_0} X(\xi), \quad v(\tau) \approx U(\xi) + \frac{1}{c_0} X(\xi) \frac{dU(\xi)}{d\xi}.$$

Усредняя последнее выражение, пишем

$$\bar{v} = \frac{1}{c_0}\overline{X\frac{dU}{d\xi}} = \frac{1}{c_0}\overline{\frac{d(XU)}{d\xi}} - \frac{1}{c_0}\overline{U^2}$$

и поскольку среднее значение от полной производной обращается в ноль, окончательно:

$$\bar{v} = -\overline{U^2}/c_0. \tag{6}$$

С той же точностью средняя по времени плотность потока вещества:

$$\overline{\rho v} = \rho_0 \bar{v} + \overline{\rho' v} = \rho_0 \bar{v} + \frac{\rho_0}{c_0}\overline{v^2}.$$

Используя (6) и равенство (в том же приближении) $\overline{v^2} = \overline{U^2}$, находим, что $\overline{\rho v} = 0$; так и должно быть (в силу закона сохранения вещества) в чисто одномерном случае, когда нет подтекания вещества «сбоку». Для средней плотности потока энергии имеем:

$$\bar{q} = \overline{\rho w v} = w_0 \overline{\rho v} + \rho_0 \overline{w' v} = \overline{p' v} = \rho_0 c_0 \overline{v^2}$$

(ср. § 65) и окончательно $\bar{q} = \rho_0 c_0 \overline{U^2}$.

Для вычисления $\overline{p'}$ и $\overline{\rho'}$ надо выразить p' и ρ' через v с точностью до членов $\sim v^2$. Из (101,7) (или из (101,4) и (101,6) для не политропного газа) получим:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{v}{c_0} + \frac{2-\alpha}{2c_0^2} v^2, \quad p' = c^2 \rho' + (\alpha - 1)\rho_0 v^2$$

и после усреднения [1]):

$$\overline{\rho'} = -\frac{\alpha \rho_0}{2c_0^2}\overline{U^2}, \quad \overline{p'} = -\frac{2-\alpha}{2}\rho_0 \overline{U^2}. \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что $\overline{p'}$ оказывается здесь отличным от нуля уже в квадратичном приближении — ср. конец § 65.

---

[1]) В более ограничительных предположениях формулы (7) были получены *А. Эйхенвальдом* (1932).