

§ 102. Образование разрывов в звуковой волне

Плоская бегущая звуковая волна как точное решение уравнений движения тоже представляет собой простую волну. Мы можем воспользоваться полученными в предыдущем параграфе общими результатами для того, чтобы выяснить некоторые свойства звуковых волн малой амплитуды во втором приближении (понимая под первым приближением то, которое соответствует обычному линейному волновому уравнению).

Прежде всего отметим, что по истечении достаточно долгого времени в звуковой волне на протяжении каждого ее периода должен возникнуть разрыв. Этот эффект приведет затем к весьма сильному затуханию волны, как это было объяснено в § 101. Фактически это может относиться, разумеется, лишь к достаточно сильному звуку; в противном случае звуковая волна успеет поглотиться благодаря обычному эффекту вязкости и теплопроводности газа раньше, чем в ней успеют развиваться эффекты высших порядков по амплитуде.

Эффект искажения профиля волны проявляется и в другом отношении. Если в некоторый момент времени волна была чисто гармонической, то с течением времени соответственно изменению формы ее профиля она перестанет быть таковой. Движение, однако, останется периодическим с прежним периодом. В разложение этой волны в ряд Фурье войдут теперь наряду с членом с основной частотой ω также и члены с кратными частотами $n\omega$ (n — целые числа). Таким образом, искажение профиля по мере распространения звуковой волны можно воспринимать как появление в ней наряду с основным тоном также и обертонов.

Скорость u перемещения точек профиля волны (распространяющейся в положительном направлении оси x) в первом приближении получается, если положить в (101,11) $v = 0$, т. е. $u = c_0$, что соответствует распространению волны без изменения формы профиля. В следующем приближении имеем:

$$u = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \rho' = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \frac{\rho_0}{c_0} v,$$

или с помощью выражения (99,10) для производной $\partial u / \partial \rho$:

$$u = c_0 + \alpha_0 v, \quad (102,1)$$

где для краткости введено обозначение¹⁾

$$\alpha = \frac{c^4}{2V^3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s. \quad (102,2)$$

Для политропных газов $\alpha = (\gamma + 1)/2$, и формула (102,1) совпадает с точной формулой (см. (101,8)) для скорости u .

¹⁾ В задаче 1 к § 93 эта величина была обозначена как α_v .

В общем случае произвольной амплитуды волна перестает быть простой после появления в ней разрывов. Существенно, однако, что волна малой амплитуды во втором приближении остается простой и при наличии разрывов. Убедиться в этом можно следующим образом. Изменения скорости, давления и удельного объема в ударной волне связаны друг с другом соотношением

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)(V_1 - V_2)}.$$

Изменение же скорости v вдоль некоторого участка длины оси x в простой волне равно интегралу

$$v_1 - v_2 = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-\frac{\partial v}{\partial p}} dp.$$

Простое вычисление с помощью разложения в ряд показывает, что оба написанных выражения отличаются друг от друга только в членах третьего порядка (при вычислении следует иметь в виду, то изменение энтропии в разрыве есть величина третьего порядка малости, а в простой волне энтропия вообще постоянна). Отсюда следует, что с точностью до членов второго порядка звуковая волна с каждой стороны от образовавшегося в ней разрыва остается простой, причем на самом разрыве будет выполнено надлежащее граничное условие. В следующих же приближениях это уже не будет иметь места, что связано с появлением отраженных от поверхности разрыва волн.

Выведем теперь условие, с помощью которого можно определить местонахождение разрывов в бегущей звуковой волне (все в том же втором приближении). Пусть u есть скорость движения разрыва (относительно неподвижной системы координат), а v_1, v_2 — скорости газа по обеим его сторонам. Тогда условие непрерывности потока вещества запишется:

$$\rho_1(v_1 - u) = \rho_2(v_2 - u),$$

откуда

$$u = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

С точностью до членов первых двух порядков эта величина равна значению производной $d(\rho v)/d\rho$, взятому в точке, где аргумент v равен полусумме $v = (v_1 + v_2)/2$. Поскольку же в простой волне $d(\rho v)/d\rho = v + c$, то согласно (102,1) имеем

$$u = c_0 + \alpha_0 \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (102,3)$$

Отсюда можно получить следующее простое геометрическое условие, определяющее место ударной волны. На рис. 82 кри-

вой линией изображен профиль распределения скоростей, соответствующий простой волне, и пусть отрезок ae есть возникающий в волне разрыв (x_s — его координата). Разность заштрихованных на рисунке площадей abc и cde определяется интегралом

$$\int_{v_1}^{v_2} (x - x_s) dv,$$

взятым по кривой $abcde$. С течением времени профиль волны смещается; вычислим производную по времени от написанного интеграла. Поскольку скорость dx/dt точек профиля волны определяется формулой (102,1), а скорость dx/dt разрыва — формулой (102,3), то мы получим:

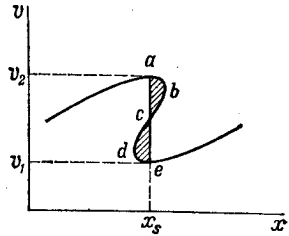


Рис. 82

$$\frac{d}{dt} \int_{v_1}^{v_2} (x - x_s) dv = \alpha \left\{ \int_{v_1}^{v_2} v dv - \frac{v_1 + v_2}{2} \int_{v_1}^{v_2} dv \right\} = 0$$

(при дифференцировании интеграла надо иметь в виду, что хотя сами пределы интегрирования v_1 и v_2 тоже меняются со временем, но значение $x - x_s$ на них всегда есть нуль и поэтому достаточно дифференцировать только под знаком интеграла).

Таким образом, интеграл $\int (x - x_s) dv$ остается с течением времени постоянным. Поскольку же в начальный момент возникновения ударной волны он равен нулю (точки a и e совпадают), то и всегда

$$\int_{abcde} (x - x_s) dv = 0. \tag{102,4}$$

Геометрически это означает, что площадь abc равна площади cde . Этим условием определяется положение разрыва.

Образование разрывов в звуковой волне представляет собой пример самопроизвольного возникновения ударных волн в отсутствии каких бы то ни было особенностей во внешних условиях движения. Следует подчеркнуть, что хотя ударная волна может самопроизвольно возникнуть в некоторый дискретный момент времени, она не может столь же дискретным образом исчезнуть. Раз возникнув, ударная волна затухает в дальнейшем лишь асимптотически при неограниченном увеличении времени.

Рассмотрим одиночный одномерный звуковой импульс сжатия газа, в котором уже успела образоваться ударная волна, и выясним, по какому закону будет происходить окончательное затухание этой волны. На поздних стадиях своего распространения

звуковой импульс с ударной волной будет иметь треугольный профиль скоростей, — линейный профиль при своем дальнейшем деформировании остается линейным¹⁾.

Пусть в некоторый момент времени (который примем за момент $t = 0$) профиль изображается треугольником ABC на рис. 83, а (значения величин, относящиеся к этому моменту времени, будем отличать индексом 1)²⁾. Перемещая точки этого профиля со скоростями $(102,1)$, мы получили бы по истечении времени t профиль $A'B'C'$ (рис. 83, б). В действительности разрыв переходит в точку E и истинный профиль будет $A'DE$. Площади $DB'F$ и $C'FE$ равны друг другу в силу условия (102,4); поэтому площадь $A'DE$ нового профиля равна площади ABC исходного профиля. Пусть l — длина звукового импульса в момент времени t , а Δv — скачок скорости в ударной волне.

За время t точка B смещается относительно точки C на расстояние $\alpha t(\Delta v)_1$; поэтому тангенс угла $B'AC'$ равен $(\Delta v)_1/[l_1 + \alpha t(\Delta v)_1]$, и мы получаем условие равенства площадей ABC и $A'DE$ в виде

$$l_1(\Delta v)_1 = \frac{l^2(\Delta v)_1}{l_1 + \alpha t(\Delta v)_1},$$

откуда

$$l = l_1 \left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1} t \right]^{1/2}, \quad \Delta v = (\Delta v)_1 \left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1} t \right]^{-1/2}. \quad (102,5)$$

Полная энергия бегущего звукового импульса (отнесенная к единице площади ее фронта) равна

$$E = \rho \int v^2 dx = E_1 \left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1} t \right]^{-1/2}. \quad (102,6)$$

При $t \rightarrow \infty$ величина скачка в ударной волне и ее энергия затухают асимптотически как $t^{-1/2}$ (или, что то же, как $x^{-1/2}$ —

1) Здесь и ниже мы говорим о профиле распределения скорости v — имея в виду лишь простоту записи формул. Фактически более интересной величиной является избыточное давление p' ; отличающееся от v лишь постоянным множителем: $p' = v/\rho_0 c_0$; к нему относятся такие же результаты. Отметим, что знак v совпадает со знаком p' , так что $v > 0$ отвечает сжатию, а $v < 0$ — разрежению. Скорость перемещения точек профиля выражается через p' формулой

$$u = c_0(1 + v_0 p'/\rho_0), \quad v = \alpha p'/\rho c^2$$

(для политропного газа $v = (\gamma + 1)/2\gamma$).

2) Индекс же 0, отличающий равновесные значения величин, будем ниже опускать.

с расстоянием $x = ct$). Длина же импульса возрастает как $t^{1/2}$. Обратим внимание также на то, что предельное значение угла наклона профиля $\Delta v/l \rightarrow 1/ct$ не зависит ни от величины скачка, ни от длины импульса.

Рассмотрим теперь предельные (на больших расстояниях от источника) свойства ударных волн, образующихся в цилиндрических и сферических звуковых волнах (Л. Д. Ландау, 1945). Начнем с цилиндрического случая.

На достаточно больших расстояниях r от оси такую волну в каждом небольшом ее участке можно рассматривать как плоскую. Скорость перемещения каждой точки профиля волны будет тогда определяться формулой (102,1). Однако если мы хотим проследить с помощью этой формулы за смещением точки профиля на протяжении больших промежутков времени, то необходимо учесть, что амплитуда цилиндрической волны уже в первом приближении падает с расстоянием как $r^{-1/2}$. Это значит, что для каждой точки профиля v будет не постоянной (как для плоской волны), а будет убывать как $r^{-1/2}$. Если v_1 есть значение v (для заданной точки профиля) на расстоянии (большом) r_1 , то можно написать $v = v_1(r_1/r)^{1/2}$. Таким образом, для скорости u точек профиля волны будем иметь

$$u = c + \alpha v_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}}. \quad (102,7)$$

Первый член представляет собой обычную скорость звука и соответствует перемещению волны «без изменения формы профиля» (отвлекаясь от общего уменьшения амплитуды как $r^{-1/2}$, т. е. понимая под профилем распределение величины $v \sqrt{r}$). Второй же член приводит к искажению профиля. Величина δr этого дополнительного смещения точек профиля в течение времени $(r - r_1)/c$ получится интегрированием по dr/c :

$$\delta r = 2\alpha \frac{v_1}{c} \sqrt{r_1} (\sqrt{r} - \sqrt{r_1}). \quad (102,8)$$

Искажение профиля цилиндрической волны растет медленнее, чем у плоской волны (где смещение δx растет пропорционально самому проходимому расстоянию x). Но и здесь оно, разумеется, приводит в конце концов к образованию разрывов. Рассмотрим ударные волны, образующиеся в достаточно далеко удалившемся от источника (оси) одиночном цилиндрическом звуковом импульсе.

Цилиндрический случай существенно отличается от плоского прежде всего тем, что одиночный импульс не может состоять из одного только сжатия или только разрежения; если за передним фронтом звукового импульса имеется область сжатия, то за ней

должна следовать область расширения (см. § 71)¹⁾. Точка максимального разрежения будет отставать от всех расположенных сзади нее, в результате чего и здесь возникнет опрокидывание профиля и появится разрыв. Таким образом, в цилиндрическом звуковом импульсе образуются две ударные волны. В переднем разрыве скорость скачком возрастает от нуля, затем следует область постепенного уменьшения сжатия, сменяющегося разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во втором разрыве. Но цилиндрический звуковой импульс специфичен (по сравнению как с плоским, так и сферическим случаями) еще и в том отношении, что он не сможет иметь заднего фронта — стремление v к нулю происходит лишь асимптотически. Это приводит к тому, что в заднем разрыве v возрастает не до нуля, а лишь до некоторого конечного (отрицательного) значения, и лишь затем асимптотически стремится к нулю. В результате возникает профиль изображенного на рис. 84 вида.

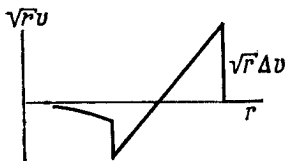


Рис. 84

Предельный закон, по которому будет происходить окончательное затухание ударных волн со временем (или, что то же, с расстоянием r от оси), можно найти аналогично тому, как это было сделано выше для плоского случая. Из приведенного там вывода видно, что предельный закон отвечает времени, когда смещение δr верхней точки профиля становится уже большим по сравнению с «первоначальной» шириной импульса l_1 (под которой будем понимать, например, расстояние от переднего разрыва до точки с $v = 0$). Это смещение на пути от r_1 до $r \ll r_1$ есть

$$\delta r \approx \frac{2\alpha}{c} (\Delta v)_1 \sqrt{r_1 r},$$

где $(\Delta v)_1$ «первоначальный» (на расстоянии r_1) скачок на переднем разрыве. Тогда «конечный» тангенс угла наклона линейной части профиля между разрывами будет $\approx \sqrt{r_1} (\Delta v)_1 / \delta r \approx c/2\alpha \sqrt{r}$. Условие постоянства площади профиля дает

$$l_1 \sqrt{r_1} (\Delta v)_1 = l^2 c / \alpha \sqrt{r},$$

откуда $l \propto r^{1/4}$ (вместо закона $l \propto x^{1/2}$ в плоском случае). Предельный закон убывания скачка Δv в переднем разрыве получается затем из $l \sqrt{r} \Delta v = \text{const}$, т. е.

$$\Delta v \propto r^{-3/4}. \quad (102,9)$$

¹⁾ Мы будем иметь в виду именно такое расположение. Оно отвечает, в частности, применению излагаемых результатов к ударным волнам, возникающим при сверхзвуковом движении конечного тела (§ 122).

Наконец, рассмотрим сферический случай ¹⁾. Общее убывание амплитуды расходящейся звуковой волны происходит как $1/r$ (где r — теперь расстояние от центра). Повторяя все изложенное выше для цилиндрического случая рассуждения, получим для скорости перемещения точек профиля волны

$$u = c + \frac{\alpha v_1 r_1}{r}, \quad (102,10)$$

после чего найдем смещение δr точки профиля на пути от r_1 до r :

$$\delta r = \frac{\alpha v_1 r_1}{c} \ln \frac{r}{r_1}. \quad (102,11)$$

Мы видим, что искажение профиля сферической волны растет с расстоянием лишь логарифмически — гораздо медленнее, чем в плоском и даже цилиндрическом случаях.

Сферическое распространение звукового импульса сжатия должно сопровождаться, как и в цилиндрическом случае, следующим за сжатием разрежением (см. § 70). Поэтому и здесь должны образоваться два разрыва (сферический одиночный импульс может, однако, иметь задний фронт и тогда во втором разрыве v возрастает скачком сразу до нуля)²⁾. Тем же способом найдем предельные законы возрастания длины импульса и убывания интенсивности ударной волны:

$$l \propto \sqrt{\ln \frac{r}{a}}, \quad \Delta v \propto \frac{1}{r \ln(r/a)}, \quad (102,12)$$

где a — некоторая постоянная размерности длины³⁾.

Задачи

1. В начальный момент профиль волны состоит из неограниченного ряда зубцов, изображенных на рис. 85⁴⁾. Определить изменение профиля и энергии волны со временем.

Решение. Заранее очевидно, что в последующие моменты времени t профиль волны будет состоять из зубцов такого же вида, с той же длиной l_0 , но меньшей высотой v . Рассмотрим один из зубцов: в момент $t = 0$ абсцисса

¹⁾ Речь может, например, идти об ударной волне, возникающей при взрыве, и рассматриваемой на больших расстояниях от источника.

²⁾ Поскольку фактически в газе всегда имеет место обычное поглощение звука, связанное с теплопроводностью и вязкостью, то ввиду медленности искажения сферической волны она может поглотиться прежде, чем успеют образоваться разрывы.

³⁾ Эта постоянная не совпадает, вообще говоря, с r_1 . Дело в том, что аргумент логарифма должен быть безразмерным и потому при $r \gg r_1$ нельзя просто пренебречь $\ln r_1$ в (102,11). Определение же коэффициента при r в большом логарифме требует более точного учета первоначальной формы профиля.

⁴⁾ Такой профиль — асимптотическая форма профиля любой периодической волны.

точки профиля с $v = v_t$ отсекает часть $v_t l_1 / v_1$ от основания треугольника. В течение же времени t эта точка выдвигается вперед на расстояние $\alpha v_t t$. Условие неизменности длины основания треугольника дает $l_1 v_t / v_1 + \alpha v_t t = l_1$, откуда

$$v_t = v_1 / (1 + \alpha v_t t / l_1).$$

При $t \rightarrow \infty$ амплитуда волны затухает как $1/t$. Для энергии находим

$$E = E_0 (1 + \alpha v_t t / l_1)^{-2}.$$

она затухает при $t \rightarrow \infty$ как t^{-2} .

2. Определить интенсивность второй гармоники, возникающей в монохроматической сферической волне благодаря искажению ее профиля.

Решение. Написав волну в виде $rv = A \cos(kr - \omega t)$, мы можем учесть искажение в первом приближении, прибавив δr к r в правой стороне равенства и разлагая по степеням δr . Это дает с помощью (102,11):

$$rv = A \cos(kr - \omega t) - \frac{\alpha k}{2c} A^2 \ln \frac{r}{r_1} \sin 2(kr - \omega t)$$

(под r_1 надо понимать здесь расстояние, на котором волну можно еще рассматривать с достаточной точностью как строго монохроматическую). Второй член в этой формуле определяет вторую гармонику спектрального разложения волны. Ее полная (средняя по времени) интенсивность I_2 равна

$$I_2 = \frac{\alpha^2 k^2}{8\pi c^3 \rho} \left(\ln \frac{r}{r_1} \right)^2 I_1^2,$$

где $I_1 = 2\pi c \rho A^2$ есть интенсивность основной, первой, гармоники.

§ 103. Характеристики

Данное в § 82 определение характеристик как линий, вдоль которых распространяются (в приближении геометрической акустики) малые возмущения, имеет общее значение, и не ограничено применением к плоскому стационарному сверхзвуковому течению, о котором шла речь в § 82.

Для одномерного нестационарного движения можно ввести характеристики как линии в плоскости x, t , угловой коэффициент которых dx/dt равен скорости распространения малых возмущений относительно неподвижной системы координат. Возмущения, распространяющиеся относительно газа со скоростью звука в положительном или отрицательном направлении оси x , перемещаются относительно неподвижной системы со скоростью $v + c$ или $v - c$. Соответственно дифференциальные уравнения двух семейств характеристик, которые мы будем условно называть характеристиками C_+ и C_- , гласят:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_+ = v + c, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_- = v - c. \quad (103,1)$$

Возмущения же, переносимые вместе с веществом газа, «распространяются» в плоскости x, t по характеристикам третьего