точки профиля с $v = v_t$ отсекает часть $v_t l_1/v_1$ от основания треугольника. В течение же времени t эта точка выдвигается вперед на расстояние $\alpha v_t t$. Условие неизменности длины основания треугольника дает $l_1 v_t/v_1 + \alpha t v_t = l_1$, откуда

$$v_t = v_1/(1 + \alpha v_1 t/l_1).$$

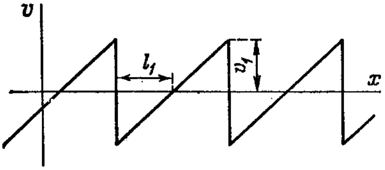

Рис. 85

При $t \to \infty$ амплитуда волны затухает как $1/t$. Для энергии находим

$$E = E_0 (1 + \alpha v_1 t/l_1)^{-2};$$

она затухает при $t \to \infty$ как t^{-2}.

2. Определить интенсивность второй гармоники, возникающей в монохроматической сферической волне благодаря искажению ее профиля.

Решение. Написав волну в виде $rv = A\cos(kr - \omega t)$, мы можем учесть искажение в первом приближении, прибавив δr к r в правой стороне равенства и разлагая по степеням δr. Это дает с помощью (102,11):

$$rv = A\cos(kr - \omega t) - \frac{\alpha k}{2c} A^2 \ln\frac{r}{r_1} \sin 2(kr - \omega t)$$

(под r_1 надо понимать здесь расстояние, на котором волну можно еще рассматривать с достаточной точностью как строго монохроматическую). Второй член в этой формуле определяет вторую гармонику спектрального разложения волны. Ее полная (средняя по времени) интенсивность I_2 равна

$$I_2 = \frac{\alpha^2 k^2}{8\pi c^3 \rho}\left(\ln\frac{r}{r_1}\right)^2 I_1^2,$$

где $I_1 = 2\pi c \rho A^2$ есть интенсивность основной, первой, гармоники.

§ 103. Характеристики

Данное в § 82 определение характеристик как линий, вдоль которых распространяются (в приближении геометрической акустики) малые возмущения, имеет общее значение, и не ограничено применением к плоскому стационарному сверхзвуковому течению, о котором шла речь в § 82.

Для одномерного нестационарного движения можно ввести характеристики как линии в плоскости x, t, угловой коэффициент которых dx/dt равен скорости распространения малых возмущений относительно неподвижной системы координат. Возмущения, распространяющиеся относительно газа со скоростью звука в положительном или отрицательном направлении оси x, перемещаются относительно неподвижной системы со скоростью $v + c$ или $v - c$. Соответственно дифференциальные уравнения двух семейств характеристик, которые мы будем условно называть характеристиками C_+ и C_-, гласят:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = v + c, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = v - c. \tag{103,1}$$

Возмущения же, переносящиеся вместе с веществом газа, «распространяются» в плоскости x, t по характеристикам третьего семейства C_0, для которых

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v. \qquad (103,2)$$

Это — просто «линии тока» в плоскости x, t (ср. конец § 82)[1]). Подчеркнем, что для существования характеристик здесь отнюдь не требуется, чтобы движение газа было сверхзвуковым. Выражаемая характеристиками направленность распространения возмущений соответствует здесь просто причинной связи движения в последующие моменты времени с предыдущим движением.

В качестве примера рассмотрим характеристики простой волны. Для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, имеем согласно (101,5) $x = t(v+c) + f(v)$. Дифференцируя это соотношение, имеем:

$$dx = (v+c)\,dt + dv\,[t + tc'(v) + f'(v)].$$

С другой стороны, вдоль характеристики C_+ имеем $dx = (v + c)\,dt$; сравнивая оба равенства, найдем, что вдоль характеристики $dv\,[t + tc'(v) + f'(v)] = 0$. Выражение в квадратных скобках не может быть равно нулю тождественно. Поэтому должно быть $dv = 0$, т. е. $v = \mathrm{const}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что вдоль каждой из характеристик C_+ остается постоянной скорость, а с нею и все остальные величины (в волне, распространяющейся влево, таким же свойством обладают характеристики C_-). Мы увидим в следующем параграфе, что это обстоятельство не случайно, а органически связано с математической природой простых волн.

Из этого свойства характеристик C_+ простой волны можно в свою очередь заключить, что они представляют собой семейство прямых линий в плоскости x, t; скорость имеет постоянные значения вдоль прямых $x = t[v + c(v)] + f(v)$ (101,5). В частности, в автомодельной волне разрежения (простая волна с $f(v) = 0$) эти прямые образуют пучок с общей точкой пересечения — началом координат плоскости x, t. Ввиду этого свойства автомодельную простую волну называют *центрированной*.

На рис. 86 изображено семейство характеристик C_+ для простой волны разрежения, образующейся при ускоренном выдвигании поршня из трубы. Это есть семейство расходящихся прямых, начинающихся на кривой $x = X(t)$, изображающей движение поршня. Справа от характеристики $x = c_0 t$ простирается область покоящегося газа, в которой все характеристики параллельны друг другу.

---

[1]) Точно такими же уравнениями (103,1—2) определяются характеристики и для нестационарного сферически симметричного движения, причем только надо заменить x на сферическую координату r (характеристики будут теперь линиями в плоскости r, t).

На рис. 87 дан аналогичный чертеж для простой волны сжатия, образующейся при ускоренном вдвигании поршня в трубу. В этом случае характеристики представляют собой сходящийся пучок прямых, которые в конце концов должны пересечься друг с другом. Поскольку каждая характеристика несет свое постоянное значение v, их пересечение друг с другом означает физически бессмысленную многозначность функции $v(x, t)$. Это — геометрическая интерпретация результата о невозможности неограниченного существования простой волны сжатия и неизбежности

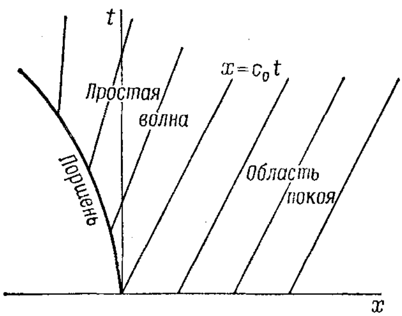

Рис. 86

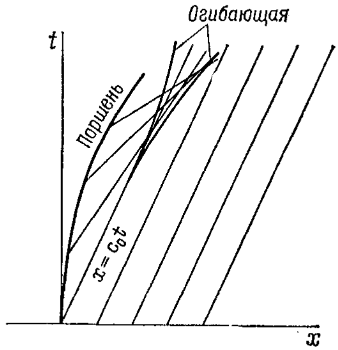

Рис. 87

возникновения в ней ударной волны, к которому мы пришли уже аналогичным путем в § 101. Геометрическое же истолкование условий (101,12), определяющих время и место образования ударной волны, заключается в следующем. Пересекающееся семейство прямолинейных характеристик имеет огибающую, заканчивающуюся со стороны малых t угловой точкой, которая и определяет первый момент возникновения многозначности. Если уравнения характеристик заданы в параметрическом виде $x = x(v)$, $t = t(v)$, то положение угловой точки как раз и определяется уравнениями (101,12)[1]).

Покажем теперь коротко, каким образом данное нами физическое определение характеристик как линий распространения возмущений соответствует известному из теории дифференциальных уравнений в частных производных чисто математическому аспекту этого понятия. Рассмотрим уравнение в частных произ-

---

[1]) Вся область между двумя ветвями огибающей трижды покрыта характеристиками — в соответствии с трехзначностью величин, возникающей при опрокидывании профиля волны.

Особому случаю, когда ударная волна возникает на границе с областью покоя, соответствует вырождение одной из ветвей огибающей в отрезок характеристики $x = c_0t$.

водных вида

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+C\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+D=0, \tag{103,3}$$

линейное по вторым производным (коэффициенты же A, B, C, D могут быть любыми функциями как от независимых переменных x, t, так и от неизвестной функции φ и ее первых производных)[1]. Уравнение (103,3) относится к эллиптическому типу, если везде $B^2-AC<0$, и к гиперболическому, если $B^2-AC>0$. В последнем случае уравнение

$$A\,dt^2-2B\,dx\,dt+C\,dx^2=0, \tag{103,4}$$

или

$$\frac{dx}{dt}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{C}, \tag{103,5}$$

определяет в плоскости x, t два семейства кривых — характеристик (для заданного решения $\varphi(x, y)$ уравнения (103,3)). Укажем, что если коэффициенты A, B, C в уравнении являются функциями только от x, t, то характеристики не зависят от конкретного решения уравнения.

Пусть данное течение описывается некоторым решением $\varphi=\varphi_0(x, t)$ уравнения (103,3), и наложим на него малое возмущение φ_1. Это возмущение предполагаем удовлетворяющим условиям, соответствующим геометрической акустике: оно слабо меняет движение (φ_1 мало вместе со своими первыми производными), но сильно меняется на протяжении малых расстояний (вторые производные от φ_1 относительно велики). Полагая в уравнении (103,3) $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, получим тогда для φ_1 уравнение

$$A\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial t}+C\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=0,$$

причем в коэффициентах A, B, C положено $\varphi=\varphi_0$. Следуя методу, принятому для перехода от волновой к геометрической оптике, пишем φ_1 в виде $\varphi_1=ae^{i\psi}$, где функция ψ (эйконал) — большая величина, и получаем для последней уравнение

$$A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}+C\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0. \tag{103,6}$$

Уравнение распространения лучей в геометрической акустике получается приравниванием dx/dt групповой скорости:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\omega}{dk},$$

где

$$k=\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \omega=-\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

[1]) Для одномерного нестационарного движения уравнению такого вида удовлетворяет потенциал скорости.

Дифференцируя соотношение

$$Ak^2 - 2Bk\omega + C\omega^2 = 0,$$

получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B\omega - Ak}{C\omega - Bk},$$

а исключая отсюда с помощью того же соотношения k/ω, мы снова придем к уравнению (103,5).

Задача

Найти уравнение второго семейства характеристик в центрированной простой волне в политропном газе.

Решение. В центрированной простой волне, распространяющейся в сторону находящегося справа от нее неподвижного газа, имеем:

$$\frac{x}{t} = v + c = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v.$$

Характеристики C_+ изображаются пучком прямых $x = \text{const}\, t$. Характеристики же C_- определяются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v - c = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}\frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma+1} c_0.$$

Интегрируя, находим:

$$x = -\frac{2}{\gamma-1} c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}},$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы характеристика C_- проходила через точку $x = c_0 t_0$, $t = t_0$ на характеристике C_+ ($x = c_0 t$), граничной между простой волной и областью покоя.

«Линии тока» в плоскости x, t даются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t} - c_0\right),$$

откуда для характеристик C_0:

$$x = -\frac{2}{\gamma-1} c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

§ 104. Инварианты Римана

Произвольное малое возмущение распространяется, вообще говоря, по всем трем характеристикам (C_+, C_-, C_0), исходящим из данной точки плоскости x, t. Можно, однако, разложить произвольное возмущение на такие части, каждая из которых распространяется лишь по одной из характеристик.