Дифференцируя соотношение

$$Ak^2 - 2Bk\omega + C\omega^2 = 0,$$

получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B\omega - Ak}{C\omega - Bk},$$

а исключая отсюда с помощью того же соотношения k/ω, мы снова придем к уравнению (103,5).

Задача

Найти уравнение второго семейства характеристик в центрированной простой волне в политропном газе.

Решение. В центрированной простой волне, распространяющейся в сторону находящегося справа от нее неподвижного газа, имеем:

$$\frac{x}{t} = v + c = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v.$$

Характеристики C_+ изображаются пучком прямых $x = \mathrm{const}\, t$. Характеристики же C_- определяются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v - c = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}\frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma+1} c_0.$$

Интегрируя, находим:

$$x = -\frac{2}{\gamma-1} c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}},$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы характеристика C_- проходила через точку $x = c_0 t_0$, $t = t_0$ на характеристике C_+ ($x = c_0 t$), граничной между простой волной и областью покоя.

«Линии тока» в плоскости x, t даются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t} - c_0\right),$$

откуда для характеристик C_0:

$$x = -\frac{2}{\gamma-1} c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

§ 104. Инварианты Римана

Произвольное малое возмущение распространяется, вообще говоря, по всем трем характеристикам (C_+, C_-, C_0), исходящим из данной точки плоскости x, t. Можно, однако, разложить произвольное возмущение на такие части, каждая из которых распространяется лишь по одной из характеристик.

Рассмотрим сначала изэнтропическое движение газа. Напишем уравнение непрерывности и уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

в уравнении непрерывности мы заменили производные от плотности на производные от давления согласно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Разделив первое уравнение на $\pm\rho c$ и сложив его со вторым, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\right)(v \pm c) = 0. \qquad (104,1)$$

Далее, введем в качестве новых неизвестных функций величины

$$J_+ = v + \int\frac{dp}{\rho c}, \qquad J_- = v - \int\frac{dp}{\rho c}, \qquad (104,2)$$

называемые *инвариантами Римана*. Напомним, что при изэнтропическом движении ρ и c являются определенными функциями от p, и потому стоящие здесь интегралы имеют определенный смысл. Для политропного газа

$$J_+ = v + \frac{2}{\gamma - 1}c, \qquad J_- = v - \frac{2}{\gamma - 1}c. \qquad (104,3)$$

После введения этих величин уравнения движения приобретают простой вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_+ = 0, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v - c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_- = 0. \qquad (104,4)$$

Дифференциальные операторы, действующие на J_+ и J_-, представляют собой не что иное, как операторы дифференцирования в плоскости x, t вдоль характеристик C_+ и C_-. Таким образом, мы видим, что вдоль каждой из характеристик C_+ и C_- остается постоянной соответственно величина J_+ или J_-. Мы можем также сказать, что малые возмущения величины J_+ распространяются только вдоль характеристик C_+, а возмущения J_- — вдоль C_-.

В общем случае неизэнтропического движения уравнения (104,1) не могут быть написаны в виде (104,4), так как $dp/\rho c$ не является полным дифференциалом. Эти уравнения, однако, по-прежнему позволяют выделить возмущения, распространяющиеся по характеристикам лишь одного семейства. Таковыми являются возмущения вида $\delta v \pm \delta p/\rho c$, где δv и δp — произвольные малые возмущения скорости и давления. Распространение этих возмущений описывается линеаризованными уравнениями

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(v \pm c)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\delta v \pm \frac{\delta p}{\rho c}\right)=0. \qquad (104,5)$$

Полная система уравнений движения малых возмущений получается добавлением сюда еще и уравнения адиабатичности

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right]\delta s=0, \qquad (104,6)$$

показывающего, что возмущения δs распространяются вдоль характеристик C_0. Произвольное малое возмущение всегда можно разложить на независимые части указанных трех видов.

Сравнение с формулой (101,4) показывает, что инварианты Римана (104,2) совпадают с теми величинами, которые в простых волнах постоянны вдоль всей области движения в течение всего времени: в простой волне, распространяющейся вправо, постоянно J_-, а в волне, бегущей влево, постоянно J_+. С математической точки зрения это есть основное свойство простых волн. Из него следует, в частности, и указанное в предыдущем параграфе свойство — прямолинейность одного из семейств характеристик. Пусть, например, волна распространяется вправо. Каждая из характеристик C_+ несет свое постоянное значение J_+ и, кроме того, на ней постоянна являющаяся постоянной во всей области величина J_-. Но из постоянства двух величин J_+ и J_- следует, что постоянны также и v и p (а с ними и все остальные величины), и мы приходим к найденному в § 103 свойству характеристик C_+, непосредственно ведущему к их прямолинейности.

Если в двух смежных областях плоскости x, t течение описывается двумя аналитически различными решениями уравнений движения, то граница между этими областями есть характеристика. Действительно, эта граница представляет собой разрыв производных каких-либо величин, т. е. некоторый слабый разрыв; последние же непременно совпадают с какой-либо характеристикой.

Весьма существенное значение в теории изэнтропического одномерного движения имеет следующее свойство простых волн: течение в области, граничащей с областью постоянного течения (течения с $v=\text{const}$, $p=\text{const}$), есть непременно простая волна.

Доказательство этого утверждения очень просто. Пусть интересующая нас область *1* плоскости x, t граничит справа с областью *2* постоянного течения (рис. 88). В последней, очевидно, постоянны оба инварианта J_+ и J_-, а оба семейства характеристик прямолинейны. Граница между обеими областями есть одна из характеристик C_+, и линии C_+ одной области не переходят в другую область. Характеристики же C_- непрерывно продолжаются из одной области в другую и, покрывая область *1*, приносят в нее из области *2* постоянное значение J_-. Таким образом, величина J_- будет постоянна и вдоль всей области *1*, так что последняя есть простая волна.

Свойство характеристик переносить вдоль себя постоянные значения определенных величин проливает свет на общую постановку вопроса о задании начальных и граничных условий к уравнениям гидродинамики. В различных конкретных физических задачах выбор этих условий обычно не вызывает сомнений и диктуется непосредственно физическими соображениями. В более сложных случаях могут, однако, оказаться полезными и чисто математические соображения, основанные на общих свойствах характеристик.

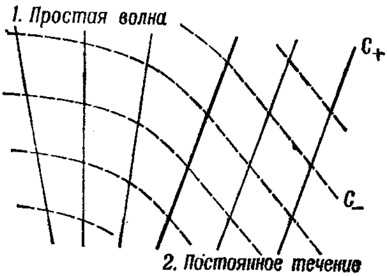

Рис. 88

Будем для определенности говорить об изэнтропическом одномерном движении газа. С чисто математической точки зрения постановка газодинамической задачи сводится обычно к определению двух искомых функций (например, v и p) в области плоскости x, t, лежащей между двумя заданными кривыми (OA и OB на рис. 89, *a*), на которых задаются граничные значения.

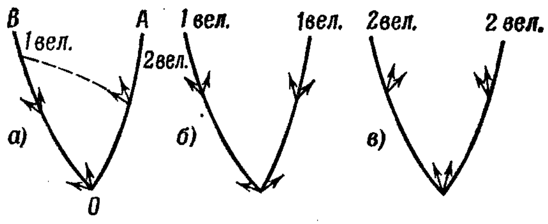

Рис. 89

Вопрос заключается в том, значения скольких величин должны быть заданы на этих кривых. В этом смысле существенно, как расположена каждая кривая по отношению к направлениям исходящих[1]) из каждой ее точки двух ветвей характеристик C_+ и C_- (показанным на рис. 89 стрелками). Могут представиться два случая: либо оба направления характеристик лежат по одну сторону от кривой, либо кривая расположена между ними. На рис. 89, *a* кривая OA относится к первому, а OB — ко второму случаю. Ясно, что для полного определения искомых функций

[1]) В плоскости x, t «исходящими» из заданной точки ветвями характеристик являются ветви, направленные в сторону возрастания t.

в области AOB на кривой OA должны быть заданы значения двух величин (например, обоих инвариантов J_+ и J_-), а на кривой OB — всего одной. Действительно, значения второй величины будут перенесены на кривую OB с кривой OA характеристиками соответствующего семейства и потому не могут быть заданы произвольным образом[1]). Аналогично, на рис. 89, *б*, *в* изображены случаи, когда на обеих граничных кривых должны быть заданы по одной или по две величины.

Следует также указать, что если граничная кривая совпадает с какой-либо характеристикой, то на ней вообще невозможно произвольное задание двух независимых величин, так как их значения связаны друг с другом одним условием — условием постоянства соответствующего инварианта Римана.

Аналогичным образом может быть разобран вопрос о задании граничных условий в общем случае неизэнтропического движения.

Выше мы говорили везде о характеристиках одномерного движения как о линиях в плоскости x, t. Характеристики могут, однако, быть определены и в плоскости любых других двух переменных, описывающих движение. Можно, например, рассматривать характеристики в плоскости переменных v, c. Для изэнтропического движения уравнения этих характеристик даются просто равенствами $J_+ = \mathrm{const}$, $J_- = \mathrm{const}$ с произвольными постоянными в их правых частях (будем называть их условно характеристиками Γ_+ и Γ_-). Так, для политропного газа это есть согласно (104,3) два семейства параллельных прямых (рис. 90).

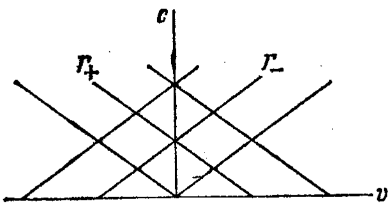

Рис. 90

Замечательно, что эти характеристики всецело определяются свойствами движущейся среды (газа) как таковой и не зависят от конкретного решения уравнений движения. Это связано с тем, что уравнение изэнтропического движения в переменных v, c есть (как мы увидим в следующем параграфе) линейное уравнение в частных производных второго порядка с коэффициентами, зависящими только от независимых переменных.

Характеристики в плоскостях x, t и v, c являются отображениями друг друга с помощью заданного решения уравнений

[1]) Для иллюстрации укажем пример такого случая: задача о движении газа при вдвигании или выдвигании поршня из бесконечной трубы. Здесь речь идет о нахождении решения газодинамических уравнений в области плоскости x, t между двумя линиями: правой полуосью x и линией $x = X(t)$, изображающей движение поршня (рис. 86, 87). На первой линии задаются значения двух величин (начальные условия $v = 0$, $p = p_0$ при $t = 0$), а на второй — всего одной величины ($v = u$, где $u(t)$ — скорость поршня).

движения. Это отображение, однако, отнюдь не должно быть взаимно однозначным. В частности, заданной простой волне соответствует всего одна характеристика в плоскости v, c, на которую отображаются все характеристики плоскости x, t. Так, для волны, бегущей вправо, это есть одна из характеристик Γ_-; характеристики C_- отображаются на всю линию Γ_-, а характеристики C_+ — на отдельные ее точки.

§ 105. Произвольное одномерное движение сжимаемого газа

Рассмотрим теперь общую задачу о произвольном одномерном изэнтропическом движении сжимаемого газа (без ударных волн) и покажем прежде всего, что эта задача может быть сведена к решению некоторого линейного дифференциального уравнения.

Всякое одномерное движение (движение, зависящее всего от одной пространственной координаты) непременно потенциально, так как всякую функцию $v(x, t)$ можно представить в виде производной $v(x, t) = \partial\varphi(x, t)/\partial x$. Поэтому мы можем воспользоваться в качестве первого интеграла уравнения Эйлера уравнением Бернулли (9,3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = 0.$$

С помощью этого равенства получаем для дифференциала $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt = v\,dx - \left(\frac{v^2}{2} + w\right)dt.$$

Независимыми переменными являются здесь x и t; произведем теперь переход к новым независимым переменным, выбрав в качестве таковых v и w. Для этого производим преобразование Лежандра; написав

$$d\varphi = d(xv) - x\,dv - d\left[t\left(w + \frac{v^2}{2}\right)\right] + t\,d\left(w + \frac{v^2}{2}\right)$$

и введя вместо потенциала φ новую вспомогательную функцию

$$\chi = \varphi - xv + t\left(w + \frac{v^2}{2}\right),$$

получаем:

$$d\chi = -x\,dv + t\,d\left(w + \frac{v^2}{2}\right) = t\,dw + (vt - x)\,dv,$$

где χ рассматривается как функция от v и w. Сравнив это соотношение с равенством $d\chi = \frac{\partial\chi}{\partial w}\,dw + \frac{\partial\chi}{\partial v}\,dv$, имеем:

$$t = \frac{\partial\chi}{\partial w}, \qquad vt - x = \frac{\partial\chi}{\partial v},$$