движения. Это отображение, однако, отнюдь не должно быть взаимно однозначным. В частности, заданной простой волне соответствует всего одна характеристика в плоскости v, c, на которую отображаются все характеристики плоскости x, t. Так, для волны, бегущей вправо, это есть одна из характеристик Γ_-; характеристики C_- отображаются на всю линию Γ_-, а характеристики C_+ — на отдельные ее точки.

§ 105. Произвольное одномерное движение сжимаемого газа

Рассмотрим теперь общую задачу о произвольном одномерном изэнтропическом движении сжимаемого газа (без ударных волн) и покажем прежде всего, что эта задача может быть сведена к решению некоторого линейного дифференциального уравнения.

Всякое одномерное движение (движение, зависящее всего от одной пространственной координаты) непременно потенциально, так как всякую функцию $v(x,t)$ можно представить в виде производной $v(x,t)=\partial\varphi(x,t)/\partial x$. Поэтому мы можем воспользоваться в качестве первого интеграла уравнения Эйлера уравнением Бернулли (9,3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+w=0.$$

С помощью этого равенства получаем для дифференциала $d\varphi$:

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt=v\,dx-\left(\frac{v^2}{2}+w\right)dt.$$

Независимыми переменными являются здесь x и t; произведем теперь переход к новым независимым переменным, выбрав в качестве таковых v и w. Для этого производим преобразование Лежандра; написав

$$d\varphi=d(xv)-x\,dv-d\left[t\left(w+\frac{v^2}{2}\right)\right]+t\,d\left(w+\frac{v^2}{2}\right)$$

и введя вместо потенциала φ новую вспомогательную функцию

$$\chi=\varphi-xv+t\left(w+\frac{v^2}{2}\right),$$

получаем:

$$d\chi=-x\,dv+t\,d\left(w+\frac{v^2}{2}\right)=t\,dw+(vt-x)\,dv,$$

где χ рассматривается как функция от v и w. Сравнив это соотношение с равенством $d\chi=\frac{\partial\chi}{\partial w}dw+\frac{\partial\chi}{\partial v}dv$, имеем:

$$t=\frac{\partial\chi}{\partial w},\qquad vt-x=\frac{\partial\chi}{\partial v},$$

или

$$t=\frac{\partial\chi}{\partial w}, \qquad x=v\frac{\partial\chi}{\partial w}-\frac{\partial\chi}{\partial v}. \tag{105,1}$$

Если функция $\chi(v, w)$ известна, то по этим формулам определится зависимость v и w от координаты x и времени t.

Выведем теперь уравнение, определяющее χ. Для этого исходим из неиспользованного еще уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Преобразуем это уравнение к переменным v, w. Написав частные производные в виде якобианов, имеем:

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(t, x)}+v\frac{\partial(t, \rho)}{\partial(t, x)}+\rho\frac{\partial(t, v)}{\partial(t, x)}=0,$$

или, умножая на $\partial(t, x)/\partial(w, v)$:

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(w, v)}+v\frac{\partial(t, \rho)}{\partial(w, v)}+\rho\frac{\partial(t, v)}{\partial(w, v)}=0.$$

При раскрытии этих якобианов надо иметь в виду следующее. Согласно уравнению состояния газа плотность ρ есть функция каких-либо двух других независимых термодинамических величин; например, можно рассматривать ρ как функцию от w и s. При $s=\text{const}$ тогда будет просто $\rho=\rho(w)$; существенно при этом, что в переменных v, w плотность оказывается не зависящей от v. Раскрывая якобианы, получаем поэтому

$$\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial x}{\partial v}-v\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial t}{\partial v}+\rho\frac{\partial t}{\partial w}=0.$$

Подставляя сюда для t и x выражения (105,1), получаем после сокращений:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dw}\left(\frac{\partial\chi}{\partial w}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}=0.$$

При $s=\text{const}$ имеем $dw=dp/\rho$. Поэтому можно написать

$$\frac{d\rho}{dw}=\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dw}=\frac{\rho}{c^2}.$$

Окончательно получаем для χ следующее уравнение:

$$c^2\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi}{\partial w}=0 \tag{105,2}$$

(скорость звука c надо рассматривать здесь как функцию от w). Задача об интегрировании нелинейных уравнений движения приведена, таким образом, к решению линейного уравнения.

Применим полученное уравнение к политропному газу. Здесь $c^2=(\gamma-1)w$, и основное уравнение (105,2) принимает вид

$$(\gamma-1)w\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi}{\partial w}=0. \tag{105,3}$$

Это уравнение может быть проинтегрировано в общем виде элементарным образом, если число $\frac{3-\gamma}{\gamma-1}$ является целым четным числом:

$$\frac{3-\gamma}{\gamma-1}=2n, \qquad \gamma=\frac{3+2n}{2n+1}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{105,4}$$

Этому условию как раз удовлетворяют одноатомный ($\gamma=5/3$, $n=1$) и двухатомный ($\gamma=7/5$, $n=2$) газы. Вводя n вместо γ, переписываем (105,3) в виде

$$\frac{2}{2n+1}\,w\,\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi}{\partial w}=0. \tag{105,5}$$

Будем обозначать функцию, удовлетворяющую этому уравнению при заданном n, посредством χ_n. Для функции χ_0 имеем:

$$2w\,\frac{\partial^2\chi_0}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi_0}{\partial w}=0.$$

Введя вместо w переменную $u=\sqrt{2w}$, получаем:

$$\frac{\partial^2\chi_0}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial v^2}=0.$$

Но это есть обычное волновое уравнение, общее решение которого есть: $\chi_0=f_1(u+v)+f_2(u-v)$, где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$\chi_0=f_1\left(\sqrt{2w}+v\right)+f_2\left(\sqrt{2w}-v\right). \tag{105,6}$$

Покажем теперь, что если известна функция χ_n, то функцию χ_{n+1} можно получить простым дифференцированием. В самом деле, дифференцируя уравнение (105,5) по w, получаем после перегруппировки членов:

$$\frac{2}{2n+1}\,w\,\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)+\frac{2n+3}{2n+1}\,\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)=0.$$

Если ввести вместо v переменную

$$v'=v\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}},$$

то получим для $\partial\chi_n/\partial w$ уравнение

$$\frac{2}{2(n+1)+1}\,w\,\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)=0,$$

совпадающее с уравнением (105,5) для функции $\chi_{n+1}(w, v')$. Таким образом, мы приходим к результату, что

$$\chi_{n+1}(w,\ v')=\frac{\partial}{\partial w}\chi_n(w,\ v)=\frac{\partial}{\partial w}\chi_n\left(w,\ \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}\,v'\right). \tag{105,7}$$

Применяя эту формулу n раз к функции χ_0 (105,6), получаем искомое общее решение уравнения (105,5):

$$\chi = \frac{\partial^n}{\partial w^n}\{f_1(\sqrt{2(2n+1)w}+v)+f_2(\sqrt{2(2n+1)w}-v)\},$$

или

$$\chi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}}\left\{\frac{F_1(\sqrt{2(2n+1)w}+v)+F_2(\sqrt{2(2n+1)w}-v)}{\sqrt{w}}\right\}, \quad (105,8)$$

где F_1, F_2 — снова две произвольные функции.

Если ввести вместо w скорость звука согласно

$$w = \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{2n+1}{2}c^2,$$

то решение (105,8) примет вид

$$\chi = \left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F_1\left(c+\frac{v}{2n+1}\right)+\frac{1}{c}F_2\left(c-\frac{v}{2n+1}\right)\right\}. \quad (105,9)$$

Выражения

$$c \pm \frac{v}{2n+1} = c \pm \frac{\gamma-1}{2}v,$$

стоящие в качестве аргумента в произвольных функциях, представляют собой не что иное, как инварианты Римана (104,3), постоянные на характеристиках.

В применениях часто возникает необходимость в вычислении значений функции $\chi(v, c)$ на характеристике. Для этой цели служит следующая формула [1]):

$$\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F\left(c\pm\frac{v}{2n+1}\right)\right\} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial c^{n-1}}\frac{F(2c+a)}{c^n}, \quad (105,10)$$

[1]) Проще всего эту формулу можно вывести с помощью теории функций комплексного переменного, используя теорему Коши. Для произвольной функции $F(c+u)$ имеем:

$$\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c} =$$
$$= 2^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial c^2}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c} = 2^{n-1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(\sqrt{z}+u)}{\sqrt{z}\,(z-c^2)^n}\,dz,$$

где интеграл берется в плоскости комплексного переменного z по контуру, охватывающему точку $z=c^2$. Положив теперь $u=c+a$ и произведя в интеграле подстановку $\sqrt{z}=2\zeta-c$, получим:

$$\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(2\zeta+a)}{\zeta^n(\zeta-c)^n}\,d\zeta,$$

где теперь контур интегрирования по ζ охватывает точку $\zeta=c$; снова применяя теорему Коши, находим, что этот интеграл совпадает с написанным в тексте выражением.

при

$$\pm\frac{v}{2n+1}=c+a$$

(a — произвольная постоянная).

Выясним теперь, в каком взаимоотношении с найденным здесь общим решением газодинамических уравнений находится решение, описывающее простую волну. Последнее отличается тем свойством, что в нем v и w являются определенной функцией друг от друга, $v=v(w)$, и поэтому обращается тождественно в нуль якобиан

$$\Delta=\frac{\partial(v, w)}{\partial(x, t)}.$$

Между тем при преобразовании к переменным v, w нам пришлось разделить уравнение движения на этот якобиан, в результате чего решение, для которого $\Delta\equiv 0$, оказалось потерянным. Таким образом, простая волна не содержится непосредственно в общем интеграле уравнений движения, а является их особым интегралом.

Для понимания природы этого особого интеграла существенно, однако, что он может быть получен из общего интеграла путем своеобразного предельного перехода, тесно связанного с физическим смыслом характеристик как линий распространения малых возмущений. Представим себе, что область плоскости v, w, в которой функция $\chi(v, w)$ отлична от нуля, стягивается к очень узкой в (пределе — к бесконечно узкой) полосе вдоль одной из характеристик. Производные от χ в поперечных к характеристике направлениях пробегают при этом значения в очень широком (в пределе — бесконечном) интервале, поскольку χ очень быстро убывает в этих направлениях. Такого рода решения $\chi(v, w)$ уравнений движения заведомо должны существовать. Действительно, рассматриваемые как «возмущение» в плоскости v, w они удовлетворяют условиям геометрической акустики и, как должно быть для таких возмущений, расположены вдоль характеристики.

Из сказанного ясно, что при такой функции χ время $t=\partial\chi/\partial w$ будет пробегать сколь угодно большой интервал значений. Производная же от χ вдоль характеристики будет некоторой конечной величиной. Но вдоль характеристики (например, одной из характеристик Γ_-) имеем:

$$\frac{dJ_-}{dv}=1-\frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dw}\frac{dw}{dv}=1-\frac{1}{c}\frac{dw}{dv}=0.$$

Поэтому производная от χ по v вдоль характеристики (обозначим ее как $-f(v)$) есть

$$\frac{d\chi}{dv}=\frac{\partial\chi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial\chi}{\partial v}+c\frac{\partial\chi}{\partial w}=-f(v).$$

Выражая частные производные от χ через x и t согласно (105,1), получим отсюда соотношение $x=(v+c)t+f(v)$, т. е. как раз уравнение (101,5) простой волны. Соотношение же (101,4), устанавливающее связь между v и c в простой волне, автоматически выполняется в силу постоянства J_- вдоль характеристики Γ_-.

В § 104 было показано, что если в некоторой части плоскости x, t решение уравнений движения сводится к постоянному течению, то в граничащих с нею областях должна иметься простая волна. Поэтому движение, описывающееся общим решением (105,8), может следовать за постоянным движением (в частности, за областью покоя), лишь через промежуточную стадию простой волны. Граница между простой волной и общим решением, как и всякая граница между областями двух аналитически различных решений, есть характеристика. При решении различных конкретных задач возникает необходимость в определении значения функции $\chi(w, v)$ на этой граничной характеристике.

Условие сшивания простой волны с общим решением на граничной характеристике получается подстановкой выражений (105,1) для x и t в уравнение простой волны $x=(v\pm c)t+$ $+f(v)$; это дает

$$\frac{\partial\chi}{\partial v}\pm c\frac{\partial\chi}{\partial w}+f(v)=0,$$

Кроме того, в простой волне (и на граничной характеристике) имеем:

$$dv=\pm\frac{dp}{\rho c}=\pm\frac{dw}{c},$$

или $\pm c=dw/dv$. Подставив это в написанное условие, получим:

$$\frac{\partial\chi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{dw}{dv}+f(v)=\frac{d\chi}{dv}+f(v)=0,$$

откуда окончательно

$$\chi=-\int f(v)\,dv, \tag{105,11}$$

чем и определяется искомое граничное значение χ. В частности, если простая волна центрирована в начале координат, т. е. $f(v)\equiv 0$, то $\chi=\text{const}$; поскольку функция χ вообще определена лишь с точностью до аддитивной постоянной, то в этом случае можно, не уменьшая общности, положить на граничной характеристике $\chi=0$.

Задачи

1. Определить движение, возникающее при отражении центрированной волны разрежения от твердой стенки.

Решение. Пусть волна разрежения возникает в момент $t=0$ в точке $x=0$ и распространяется в положительном направлении оси x; она дойдет до стенки через промежуток времени $t = l/c_0$, где l — расстояние до стенки. На рис. 91 изображена диаграмма характеристик для процесса отражения волны. В областях *1* и *1'* газ неподвижен, в области *3* движется с постоянной скоростью $v = -U$[1]). Область *2* есть падающая волна разрежения (с прямолинейными характеристиками C_+), а *5* — отраженная волна (с прямолинейными характеристиками C_-). Область *4* есть «область взаимодействия», в которой должно быть найдено решение; попадая в эту область, прямолинейные характеристики искривляются. Это решение вполне определяется граничными условиями на отрезках *ab* и *ac*. На *ab* (т. е. на стенке) должно быть $v = 0$ при $x = l$; ввиду (105,1) имеем отсюда условие

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} = -l \quad \text{при} \quad v = 0.$$

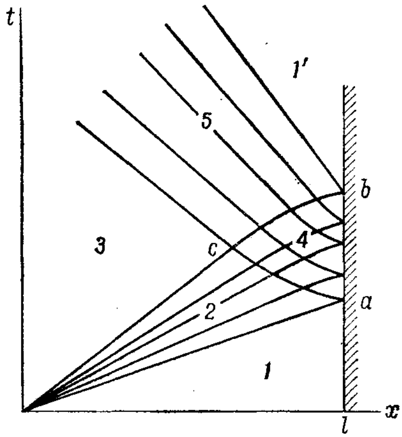

Рис. 91

Граница же *ac* с волной разрежения есть отрезок характеристики C_-; поэтому на нем

$$c - \frac{\gamma - 1}{2} v = c - \frac{v}{2n+1} = \text{const},$$

а поскольку в точке *a* имеем $v = 0$, $c = c_0$, то $\text{const} = c_0$. На этой границе должно быть $\chi = 0$, так что имеем условие

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad c - \frac{v}{2n+1} = c_0.$$

Легко убедиться в том, что функция вида (105,9), удовлетворяющая этим условиям, есть

$$\chi = \frac{l(2n+1)}{2^n n!} \left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1} \left\{\frac{1}{c}\left[\left(c - \frac{v}{2n+1}\right)^2 - c_0^2\right]^n\right\}, \tag{1}$$

чем и определяется искомое решение.

Уравнение характеристики *ac* есть (см. задачу § 103)

$$x = -(2n+1)c_0 t + 2(n+1)\, l \left(\frac{tc_0}{l}\right)^{\frac{2n+1}{2(n+1)}}.$$

Ее пересечение с характеристикой *Oc*

$$\frac{x}{t} = c_0 - \frac{\gamma+1}{2} U = c_0 - \frac{2(n+1)}{2n+1} U$$

определяет момент исчезновения падающей волны:

$$t_c = \frac{l(2n+1)^{n+1} c_0^n}{[(2n+1)c_0 - U]^{n+1}}.$$

На рис. 91 предполагается, что $U < 2c_0/(\gamma+1)$; в противном случае характеристика *Oc* направлена в сторону отрицательных x (рис. 92). Процесс

[1]) Если волна разрежения возникает от поршня, который начинает выдвигаться из трубы с постоянной скоростью, то U есть скорость поршня.

взаимодействия падающей и отраженной волн длится при этом бесконечное (а не конечное, как на рис. 91) время.

Функция (1) описывает также и взаимодействие двух одинаковых центрированных волн разрежения, вышедших в момент времени $t=0$ из точек $x=0$ и $x=2l$ и распространяющихся навстречу друг другу, как это очевидно из соображений симметрии (рис. 93) [1].

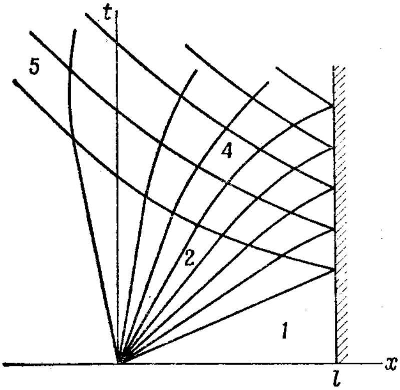

Рис. 92

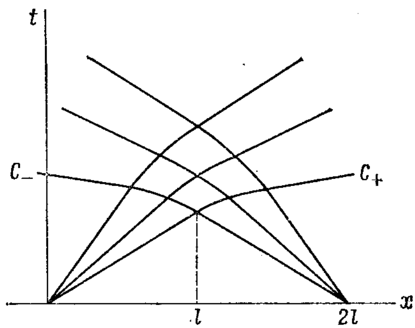

Рис. 93

2. Вывести уравнение, аналогичное уравнению (105,3), для одномерного изотермического движения идеального газа.

Решение. Для изотермического движения в уравнении Бернулли вместо тепловой функции w стоит величина

$$\mu=\int\frac{dp}{\rho}=c_T^2\int\frac{d\rho}{\rho}=c_T^2\ln\rho,$$

где $c_T^2=(\partial p/\partial\rho)_T$ — квадрат изотермической скорости звука; у идеального газа в изотермическом случае $c_T=\text{const}$. Выбрав эту величину (вместо w) в качестве независимой переменной, получим тем же способом, что и в тексте, для функции χ следующее линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$c_T^2\frac{\partial^2\chi}{\partial\mu^2}+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}=0.$$

§ 106. Задача о сильном взрыве

Рассмотрим распространение сферической ударной волны большой мощности, возникшей в результате сильного взрыва, т. е. мгновенного выделения в некотором небольшом объеме большого количества энергии (которую обозначим посредством E); газ, в котором волна распространяется, будем считать политропным [1].

[1]) Излагаемое ниже решение этой задачи получено независимо *Л. И. Седовым* (1946) и *Нейманом* (*J. von Neumann*, 1947). С меньшей полнотой (без построения аналитического решения уравнений) задача была рассмотрена *Тэйлором* (*G. I. Taylor*, 1941, опубликовано в 1950).