взаимодействия падающей и отраженной волн длится при этом бесконечное (а не конечное, как на рис. 91) время.

Функция (1) описывает также и взаимодействие двух одинаковых центрированных волн разрежения, вышедших в момент времени $t = 0$ из точек $x = 0$ и $x = 2l$ и распространяющихся навстречу друг другу, как это очевидно из соображений симметрии (рис. 93) [1].

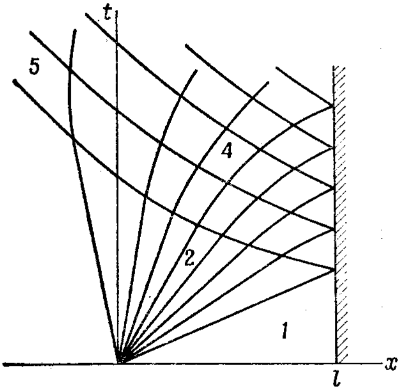

Рис. 92

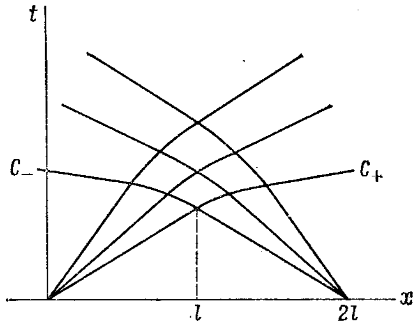

Рис. 93

2. Вывести уравнение, аналогичное уравнению (105,3), для одномерного изотермического движения идеального газа.

Решение. Для изотермического движения в уравнении Бернулли вместо тепловой функции w стоит величина

$$\mu = \int \frac{dp}{\rho} = c_T^2 \int \frac{d\rho}{\rho} = c_T^2 \ln \rho,$$

где $c_T^2 = (\partial p / \partial \rho)_T$ — квадрат изотермической скорости звука; у идеального газа в изотермическом случае $c_T = \text{const}$. Выбрав эту величину (вместо w) в качестве независимой переменной, получим тем же способом, что и в тексте, для функции χ следующее линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$c_T^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = 0.$$

§ 106. Задача о сильном взрыве

Рассмотрим распространение сферической ударной волны большой мощности, возникшей в результате сильного взрыва, т. е. мгновенного выделения в некотором небольшом объеме большого количества энергии (которую обозначим посредством E); газ, в котором волна распространяется, будем считать политропным [1].

[1]) Излагаемое ниже решение этой задачи получено независимо *Л. И. Седовым* (1946) и *Нейманом* (*J. von Neumann*, 1947). С меньшей полнотой (без построения аналитического решения уравнений) задача была рассмотрена *Тэйлором* (*G. I. Taylor*, 1941, опубликовано в 1950).

Мы будем рассматривать волну на расстояниях, не слишком далеких от источника, в той области, где волна обладает еще большой интенсивностью. В то же время эти расстояния предполагаются большими по сравнению с размерами источника: это дает возможность считать, что выделение энергии E произошло в одной точке (в начале координат).

Большая интенсивность ударной волны означает, что скачок давления в ней очень велик. Мы будем считать, что давление p_2 позади разрыва настолько велико по сравнению с давлением p_1 невозмущенного газа впереди него, что

$$\frac{p_2}{p_1} \gg \frac{\gamma+1}{\gamma-1}.$$

Это дает возможность везде пренебрегать p_1 по сравнению с p_2, причем отношение плотностей ρ_2/ρ_1 будет равно своему предельному значению $(\gamma+1)/(\gamma-1)$ (см. § 89).

Таким образом, вся картина движения газа будет определяться всего двумя параметрами: начальной плотностью газа ρ_1 и выделяющейся при взрыве энергией E. Из этих параметров и двух независимых переменных — времени t и координаты (расстояния от центра) r — можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, которую мы напишем в виде

$$r(\rho_1/Et^2)^{1/5}.$$

В результате все движение будет обладать определенной автомодельностью.

Прежде всего можно утверждать, что положение самой ударной волны в каждый момент времени должно соответствовать определенному постоянному значению указанной безразмерной комбинации. Тем самым сразу определяется закон перемещения ударной волны со временем; обозначив расстояние волны от центра посредством R, имеем

$$R = \beta\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5}, \tag{106,1}$$

где β — числовая постоянная (зависящая от γ), которая сама определится в результате решения уравнений движения. Скорость распространения ударной волны (скорость относительно невозмущенного газа, т. е. относительно неподвижной системы координат):

$$u_1 = \frac{dR}{dt} = \frac{2R}{5t} = \frac{2\beta E^{1/5}}{5\rho_1^{1/5}t^{3/5}}. \tag{106,2}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче закон движения ударной волны определяется (с точностью до постоянного множителя) уже из простых соображений размерности.

Давление p_1, плотность ρ_1 и скорость $v_2 = u_2 - u_1$ газа (относительно неподвижной системы координат) на «задней» стороне разрыва могут быть выражены через u_1 по полученным в § 89 формулам. Согласно (89,10—11) имеем [1]:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1} u_1, \qquad \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 u_1^2. \tag{106,3}$$

Плотность остается постоянной во времени, а v_2 и p_2 убывают соответственно как $t^{-3/5}$ и $t^{-6/5}$. Отметим также, что создаваемое ударной волной давление p_2 растет с увеличением полной энергии взрыва как $E^{2/5}$.

Перейдем, далее, к определению движения газа во всей области за ударной волной. Введем вместо скорости v, плотности ρ газа и квадрата $c^2 = \gamma p/\rho$ скорости звука в нем (который заменит собой переменную p — давление) безразмерные переменные V, G, Z, определив их посредством [2])

$$v = \frac{2r}{5t} V, \qquad \rho = \rho_1 G, \qquad c^2 = \frac{4r^2}{25t^2} Z. \tag{106,4}$$

Величины V, G, Z могут быть функциями только одной безразмерной независимой «автомодельной» переменной, которую определим как

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{\beta} \left(\frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{1/5}. \tag{106,5}$$

В соответствии с (106,3), на поверхности разрыва (т. е. при $\xi = 1$) они должны принимать значения

$$V(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \qquad G(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}. \tag{106,6}$$

Уравнения центрально-симметричного адиабатического движения газа гласят:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \end{gathered} \tag{106,7}$$

Последнее уравнение есть уравнение сохранения энтропии, в которое подставлено выражение (83,12) для энтропии политропного газа. После подстановки выражений (106,4) получается система уравнений в полных производных для функций V, G, Z. Интегрирование этой системы облегчается тем, что один из ее

---

[1]) Определяемые формулами (89,11) скорости ударной волны относительно газа мы обозначаем здесь как u_1 и u_2.

[2]) Не смешивать обозначение V в этом и следующем параграфах с обозначением удельного объема в других местах!

интегралов может быть написан непосредственно из следующих соображений.

Тот факт, что мы пренебрегаем давлением p_1 невозмущенного газа, означает, другими словами, что мы пренебрегаем первоначальной энергией газа по сравнению с энергией E, приобретаемой им в результате взрыва. Поэтому ясно, что полная энергия газа внутри ограниченной ударной волной сферы постоянна (и равна E). Более того, ввиду автомодельности движения очевидно, что должна оставаться неизменной энергия газа и внутри любой сферы меньшего радиуса, расширяющейся со временем по закону $\xi = \mathrm{const}$ с любым (а не только равным ξ_0) значением const; радиальная скорость перемещения точек этой сферы равна $v_n = 2r/5t$ (ср. (106,2)).

Легко написать уравнение, выражающее это постоянство энергии. С одной стороны, в течение времени dt через поверхность сферы (площади $4\pi r^2$) уходит энергия

$$dt 4\pi r^2 \rho v \left(w + \frac{v^2}{2}\right).$$

С другой стороны, за это же время объем сферы увеличивается на элемент $dt v_n 4\pi r^2$, внутри которого заключен газ с энергией

$$dt 4\pi r^2 v_n \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right).$$

Приравняв эти два выражения друг другу, подставив ε и w из (83, 10—11) и введя безразмерные функции согласно (106,4), получим соотношение

$$Z = \frac{\gamma(\gamma-1)(1-V)V^2}{2(\gamma V-1)}, \qquad (106,8)$$

которое и является искомым интегралом системы уравнений. Он автоматически удовлетворяет граничным условиям (106,6).

После установления интеграла (106,8) интегрирование системы уравнений элементарно, хотя и громоздко. Второе и третье из уравнений (106,7) дают

$$\begin{gathered} \frac{dV}{d\ln\xi} - (1-V)\frac{d\ln G}{d\ln\xi} = -3V, \\ \frac{d\ln Z}{d\ln\xi} - (\gamma-1)\frac{d\ln G}{d\ln\xi} = -\frac{5-2V}{1-V}. \end{gathered} \qquad (106,9)$$

Из этих двух уравнений с помощью соотношения (106,8) выражаем производные $dV/d\ln\xi$ и $d\ln G/dV$ в виде функций только от V, после чего интегрирование с учетом граничных условий

(106,6) приводит к следующим результатам:

$$\xi^5=\left[\frac{\gamma+1}{2}V\right]^{-2}\left\{\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\right\}^{\nu_1}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\right]^{\nu_2},$$

$$G=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\right]^{\nu_3}\left\{\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\right\}^{\nu_4}\times$$
$$\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(1-V)\right]^{\nu_5}, \qquad (106,10)$$

$$\nu_1=-\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)}, \qquad \nu_2=\frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1}, \qquad \nu_3=\frac{3}{2\gamma+1},$$
$$\nu_4=-\frac{\nu_1}{2-\gamma}, \qquad \nu_5=-\frac{2}{2-\gamma}.$$

Формулы (106,8), (106,10) дают полное решение поставленной задачи. Постоянная β, входящая в определение независимой переменной ξ, определяется условием

$$E=\int_0^R \rho\left(\frac{v^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}\right)4\pi r^2\,dr,$$

выражающим равенство полной энергии газа энергии взрыва E. После введения безразмерных величин это условие принимает вид

$$\beta^5\frac{16\pi}{25}\int_0^1 G\left[\frac{V^2}{2}+\frac{Z}{\gamma(\gamma-1)}\right]\xi^4\,d\xi=1. \qquad (106,11)$$

Так, для воздуха ($\gamma=7/5$) оказывается $\beta=1{,}033$.

Из формул (106,10) легко видеть, что при $\xi\to 0$ функция V стремится к постоянному пределу, а функция G — к нулю по законам

$$V-\frac{1}{\gamma}\propto\xi^{5/\nu_2}, \qquad G\propto\xi^{5\nu_3/\nu_2}.$$

Отсюда следует, что отношения v/v_2 и ρ/ρ_2 как функции отношения $r/R=\xi$ стремятся при $\xi\to 0$ к нулю по законам

$$v/v_2\propto r/R, \qquad \rho/\rho_2\propto(r/R)^{3/(\gamma-1)}; \qquad (106,12)$$

отношение же давлений p/p_2 стремится к постоянному пределу, а отношение температур — соответственно к бесконечности[1]).

[1]) Эти утверждения относятся к значениям $\gamma<7$ (при этом функция $V(\xi)$ меняется от значения $V(1)=2/(\gamma+1)$ до $V(0)=1/\gamma$). Для реальных газов, термодинамические функции которых можно было бы аппроксимировать формулами для политропного газа, это неравенство заведомо выполняется (фактически верхним пределом γ является в этом смысле значение 5/3, отвечающее одноатомному газу). Укажем, однако, для формальной полноты, что при $\gamma>7$ функция $V(\xi)$ меняется от значения $2/(\gamma+1)$ при $\xi=1$ до предельного значения 1, достигаемого при определенном (зависящем от γ) значении $\xi=\xi_0<1$; в этой точке функция G обращается в нуль, т. е. возникает расширяющаяся сферическая область пустоты.

На рис. 94 изображены графически величины v/v_2, p/p_2 и ρ/ρ_2 как функции r/R для воздуха ($\gamma = 1{,}4$). Обращает на себя внимание очень быстрое убывание плотности по направлению внутрь сферы: почти все вещество сконцентрировано в сравнительно узком слое позади фронта ударной волны. Это обстоятельство является естественным следствием того, что по поверхности наибольшего, равного R, радиуса должно быть распределено вещество с шестикратной по сравнению с нормальной плотностью[1]).

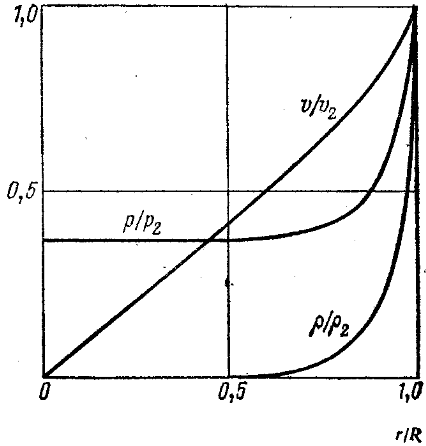

Рис. 94

§ 107. Сходящаяся сферическая ударная волна

Рядом поучительных особенностей обладает задача о сходящейся к центру ударной волне большой интенсивности[2]). Вопрос о конкретном механизме возникновения такой волны нас не будет интересовать; достаточно представлять себе, что волна создана каким-то «сферическим поршнем», сообщающим газу начальный толчок; по мере схождения к центру волна усиливается.

Мы будем рассматривать движение газа на той стадии процесса, когда радиус R сферической поверхности разрыва уже мал по сравнению с ее начальным радиусом — радиусом «поршня» R_0. На этой стадии характер движения в значительной степени (ниже будет видно — какой) не зависит от конкретных начальных условий. Ударную волну будем считать уже настолько сильной, что давлением p_1 газа перед ней можно (как и в предыдущем параграфе) пренебречь по сравнению с давлением p_2 позади нее. Что касается полной энергии газа, заключенной в рассматриваемой (переменной!) области $r \sim R \ll R_0$, то она отнюдь не постоянна (как будет видно ниже — убывает со временем).

Пространственный масштаб рассматриваемого движения может определяться лишь самим, меняющимся со временем, ра-

---

[1]) Результаты вычислений для других значений γ, а также аналогичное решение задачи о сильном взрыве в случае цилиндрической симметрии приведены *Л. И. Седовым* в книге «Методы подобия и размерности в механике», изд. 9 — М.: Наука, 1981, гл. IV, § 11.

[2]) Эта задача была рассмотрена независимо *Гудерлеем* (*G. Guderley*, 1942) и *Л. Д. Ландау* и *К. П. Станюковичем* (1944, опубликовано в 1955).