На рис. 94 изображены графически величины v/v_2, p/p_2 и ρ/ρ_2 как функции r/R для воздуха ($\gamma = 1{,}4$). Обращает на себя внимание очень быстрое убывание плотности по направлению внутрь сферы: почти все вещество сконцентрировано в сравнительно узком слое позади фронта ударной волны. Это обстоятельство является естественным следствием того, что по поверхности наибольшего, равного R, радиуса должно быть распределено вещество с шестикратной по сравнению с нормальной плотностью[1]).

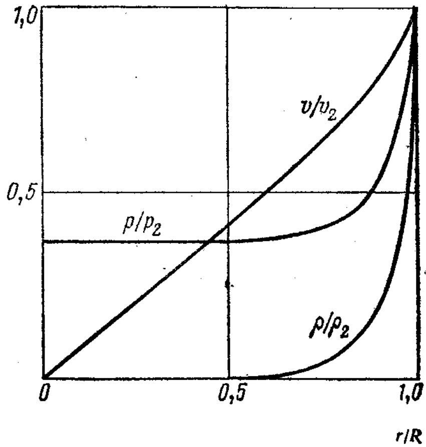

Рис. 94

§ 107. Сходящаяся сферическая ударная волна

Рядом поучительных особенностей обладает задача о сходящейся к центру ударной волне большой интенсивности[2]). Вопрос о конкретном механизме возникновения такой волны нас не будет интересовать; достаточно представлять себе, что волна создана каким-то «сферическим поршнем», сообщающим газу начальный толчок; по мере схождения к центру волна усиливается.

Мы будем рассматривать движение газа на той стадии процесса, когда радиус R сферической поверхности разрыва уже мал по сравнению с ее начальным радиусом — радиусом «поршня» R_0. На этой стадии характер движения в значительной степени (ниже будет видно — какой) не зависит от конкретных начальных условий. Ударную волну будем считать уже настолько сильной, что давлением p_1 газа перед ней можно (как и в предыдущем параграфе) пренебречь по сравнению с давлением p_2 позади нее. Что касается полной энергии газа, заключенной в рассматриваемой (переменной!) области $r \sim R \ll R_0$, то она отнюдь не постоянна (как будет видно ниже — убывает со временем).

Пространственный масштаб рассматриваемого движения может определяться лишь самим, меняющимся со временем, ра-

---

[1]) Результаты вычислений для других значений γ, а также аналогичное решение задачи о сильном взрыве в случае цилиндрической симметрии приведены *Л. И. Седовым* в книге «Методы подобия и размерности в механике», изд. 9 — М.: Наука, 1981, гл. IV, § 11.

[2]) Эта задача была рассмотрена независимо *Гудерлеем* (*G. Guderley*, 1942) и *Л. Д. Ландау* и *К. П. Станюковичем* (1944, опубликовано в 1955).

диусом ударной волны $R(t)$, а масштаб скорости — производной dR/dt. В этих условиях естественно предположить, что движение будет автомодельным, с независимой «автомодельной переменной» $\xi = r/R(t)$. Однако зависимость $R(t)$ нельзя определить из одних только соображений размерности.

Примем момент фокусировки ударной волны (т. е. момент, когда R обращается в нуль) в качестве $t = 0$. Тогда времени до фокусировки отвечают значения $t < 0$. Будем искать функцию $R(t)$ в виде

$$R(t) = A(-t)^{\alpha} \tag{107,1}$$

с неизвестным заранее *показателем автомодельности* α. Оказывается, что этот показатель определяется условием существования самого решения уравнений движения (в области $r \ll R_0$) с надлежащими граничными условиями. Тем самым определяется и размерность постоянного параметра A. Величина же этого параметра остается неопределенной и может быть, в принципе, найдена лишь путем решения задачи о движении газа в целом, т. е. путем сшивки автомодельного решения с решением на расстояниях $r \sim R_0$, зависящим от конкретных начальных условий. Именно через этот параметр, и только через него, зависит движение при $R \ll R_0$ от способа начального создания ударной волны.

Покажем, как осуществляется решение поставленной таким образом задачи.

Подобно тому, как это было сделано в § 106, введем безразмерные неизвестные функции согласно определениям

$$v = \frac{\alpha r}{t} V(\xi), \qquad \rho = \rho_1 G(\xi), \qquad c^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{t^2} Z(\xi), \tag{107,2}$$

где

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{A(-t)^{\alpha}} \tag{107,3}$$

(при $\alpha = 2/5$ определения (107,2) совпадают с (106,4)). Напомним, что v — радиальная скорость газа относительно неподвижной системы координат, связанной с неподвижным газом внутри сферы $r = R_0$; газ движется вместе с ударной волной по направлению к центру, чему отвечает $v < 0$ (так что $V(\xi) > 0$).

Фактически искомое решение уравнений движения относится лишь к области $r \sim R$ позади ударной волны, и к достаточно малым временам t (при которых $R \ll R_0$). Но формально получаемое решение охватывает все пространство $r \geqslant R$ — от поверхности разрыва до бесконечности, и все времена $t \leqslant 0$; при этом переменная ξ пробегает все значения от 1 до ∞. Соответственно, граничные условия для функций G, V, Z должны быть поставлены при $\xi = 1$ и $\xi = \infty$.

Значение $\xi = 1$ отвечает поверхности ударной волны; граничные условия на ней совпадают с (106,6).

Для установления условий на бесконечности (по ξ) замечаем, что при $t = 0$ (в момент фокусировки волны) все величины v, ρ, c^2 на всех конечных расстояниях от центра должны оставаться конечными. Но при $t = 0$, $r \neq 0$ переменная $\xi = \infty$. Для того чтобы функции $v(r, t)$ и $c^2(r, t)$ при этом оставались конечными, функции $V(\xi)$ и $Z(\xi)$ должны обращаться в ноль,

$$V(\infty) = 0, \qquad Z(\infty) = 0. \tag{107,4}$$

После подстановки (107,2—3), система уравнений (106,7) принимает вид

$$(1 - V)\frac{dV}{d\ln\xi} - \frac{Z}{\gamma}\frac{d\ln G}{d\ln\xi} - \frac{1}{\gamma}\frac{dZ}{d\ln\xi} = \frac{2}{\gamma}Z - V\left(\frac{1}{\alpha} - V\right),$$

$$\frac{dV}{d\ln\xi} - (1 - V)\frac{d\ln G}{d\ln\xi} = -3V, \tag{107,5}$$

$$(\gamma - 1)Z\frac{d\ln G}{d\ln\xi} - \frac{dZ}{d\ln\xi} = \frac{2Z(1/\alpha - V)}{1 - V}$$

(последние два уравнения — ср. с (106,9)). Отметим, что независимая переменная ξ входит в эти уравнения только в виде дифференциала $d\ln\xi$; постоянная $\ln A$ при этом выпадает из уравнений вовсе и, следовательно, остается неопределенной — в соответствии со сказанным выше.

Коэффициенты при производных в уравнениях (107,5) и их правые части содержат только V и Z (но не G)[1]). Решив эти уравнения относительно производных, мы выразим последние через эти две функции. Таким образом, получим уравнения

$$\frac{d\ln\xi}{dV} = -\frac{Z - (1 - V)^2}{(3V - \varkappa)Z - V(1 - V)(1/\alpha - V)}, \tag{107,6}$$

$$(1 - V)\frac{d\ln G}{d\xi} = 3V - \frac{(3V - \varkappa)Z - V(1 - V)(1/\alpha - V)}{Z - (1 - V)^2} \tag{107,7}$$

(где $\varkappa = 2(1 - \alpha)/\alpha\gamma$). В качестве же третьего напишем уравнение, получающееся делением производной $dZ/d\ln\xi$ на $dV/d\ln\xi$; оно гласит:

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{1 - V}\left\{\frac{[Z - (1 - V)^2][2/\alpha - (3\gamma - 1)V]}{(3V - \varkappa)Z - V(1 - V)(1/\alpha - V)} + \gamma - 1\right\}. \tag{107,8}$$

Если найдено нужное решение уравнения (107,8), т. е. функциональная зависимость $Z(V)$, то после этого решение уравнений (107,6—7) (нахождение зависимости $\xi(V)$ и затем $G(\xi)$) сводится к квадратурам.

---

[1]) Именно в этом состоит преимущество введения в качестве основных переменных v, ρ, c^2 вместо v, ρ, p.

Таким образом, вся задача сводится прежде всего к решению уравнения (107,8). Интегральная кривая на плоскости V, Z должна выходить из точки (назовем ее точкой $У$) с координатами $V(1)$, $Z(1)$ — «образа» ударной волны на плоскости V, Z. Указанием этой точки уже определяется решение уравнения (107,8) (при заданном α): интегральная кривая уравнения первого порядка однозначно определяется заданием одной (не особой) ее точки. Выясним условие, позволяющее установить значение α, приводящее к «правильной» интегральной кривой.

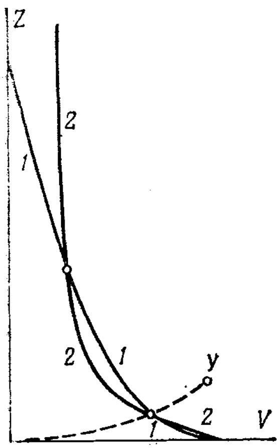

Рис. 95

Это условие возникает из очевидного физического требования: зависимости всех величин от ξ должны быть однозначными — каждому значению ξ должны отвечать единственные значения V, G, Z. Это значит, что во всей области изменения переменной ξ ($1 \leqslant \xi \leqslant \infty$, т. е. $0 \leqslant \ln \xi \leqslant \infty$) функции $\xi(V)$, $\xi(G)$, $\xi(Z)$ не должны иметь экстремумов. Другими словами, производные $d \ln \xi / dV$, ... должны нигде не обращаться в нуль. На рис. 95 кривая 1 — парабола

$$Z = (1 - V)^2. \qquad (107,9)$$

Легко видеть, что точка $У$ лежит над ней[1]). Между тем, интегральная кривая, отвечающая решению поставленной задачи, должна прийти в начало координат — в соответствии с предельным условием (107,4); поэтому она непременно пересекает параболу (107,9). Но все указанные производные выражаются, согласно (107,6—8), дробными выражениями, в числителе которых стоит разность $Z - (1 - V)^2$. Для того чтобы эти выражения не обращались в нуль в точке пересечения интегральной кривой с параболой (107,9), должно одновременно быть

$$(3V - \varkappa)Z = V(1 - V)(1/\alpha - V). \qquad (107,10)$$

Другими словами, интегральная кривая должна проходить через точку пересечения параболы (107,9) с кривой (107,10) (кривая 2 на рис. 95); эта точка — особая точка уравнения (107,8) (производная $dZ/dV = 0/0$). Этим условием и определяется значение показателя автомодельности α; приведем два значения, получающиеся в результате численных расчетов:

$$\alpha = 0,6884 \text{ при } \gamma = 5/3; \quad \alpha = 0,7172 \text{ при } \gamma = 7/5. \qquad (107,11)$$

[1]) Это обстоятельство выражает собой просто тот факт, что скорость газа на задней стороне поверхности разрыва меньше скорости звука в нем.

Пройдя через особую точку, интегральная кривая устремляется в начало координат (точка O), отвечающее предельным значениям (107,4). Для уяснения математической ситуации, опишем кратко картину распределения интегральных кривых уравнения (107,8) на плоскости V, Z (при «правильном» значении α), не проводя соответствующих вычислений [1]).

Кривые (107,9) и (107,10) пресекаются, вообще говоря, в двух точках — кружки на рис. 95 (помимо несущественной точки $V=1$, $Z=0$ на оси абсцисс). Кроме того, уравнение имеет особую точку c в пересечении кривой (107,10) с прямой $(3\gamma-1)V=2/\alpha$ (обращение в нуль второго множителя в числителе в (107,8)). Точка a, через которую проходит «правильная» интегральная кривая — точка типа седла; точки b и c — узлы. Узловой особой точкой является также и начало координат 0. Вблизи последнего уравнение (107,8) принимает вид

$$\frac{dZ}{dV}=\frac{2Z}{V+\varkappa Z}.$$

Элементарное интегрирование этого однородного уравнения показывает, что при $V\to 0$ функция $Z(V)$ стремится к нулю быстрее, чем V, а именно

$$Z\approx \mathrm{const}\cdot V^2. \qquad (107,12)$$

Таким образом, из начала координат выходит бесконечное множество интегральных кривых (отличающихся значением const в (107,12)). Все эти кривые входят затем в узел b или узел c — за исключением лишь одной, входящей в седловую точку a (одна из двух сепаратрис — единственных интегральных кривых, проходящих через седло) [2]).

Началу координат отвечает $\xi=\infty$, т. е. момент фокусировки ударной волны в центре. Определим предельные распределения всех величин по радиальным расстояниям в этот момент. С учетом (107,12) из уравнений (107,6—7) найдем, что

$$V=\mathrm{const}\cdot\xi^{-1/\alpha},\quad Z=\mathrm{const}\cdot\xi^{-2/\alpha},\quad G=\mathrm{const}\ \text{при}\ \xi\to\infty \qquad (107,13)$$

(значения постоянных коэффициентов могут быть найдены только путем фактического численного определения интегральной

[1]) Исследование производится общими методами качественной теории дифференциальных уравнений. Классификацию типов особых точек уравнения первого порядка можно найти в книге: *В. В. Степанов*, Курс дифференциальных уравнений, глава II.

[2]) Описанная картина, как оказывается, имеет место лишь при $\gamma<\gamma_1=1,87\ldots$ При $\gamma=\gamma_1$ и «правильном» α точки a и b сливаются, а при $\gamma>\gamma_1$ картина распределения интегральных кривых меняется и требуется более глубокое исследование. Напомним, однако, что в физически реальных случаях $\gamma\leqslant 5/3$ (ср. примечание на стр. 562).

кривой на всем ее протяжении). Подставив эти выражения в определения (107,2), получим [1])

$$|v| \propto c \propto r^{-(1/\alpha-1)}, \quad \rho = \text{const}, \quad p \propto r^{-2(1/\alpha-1)}. \quad (107,14)$$

Эти законы можно было бы найти и прямо из соображений размерности (после того, как стала известной размерность A). В нашем распоряжении имеется два параметра, ρ_1 и A, и одна переменная r; из них можно составить всего одну комбинацию размерности скорости: $A^{1/\alpha} r^{1-1/\alpha}$; величиной же с размерностью плотности является лишь само ρ_1.

Найдем еще закон, по которому меняется со временем полная энергия газа в области автомодельного движения. Размеры (по радиусу) этой области — порядка величины радиуса R ударной волны и уменьшаются вместе с ним. Примем условно за границу автомодельной области некоторое определенное значение $r/R = \xi_1$. Полная энергия газа в сферическом слое между радиусами R и $\xi_1 R$ после введения безразмерных переменных выражается интегралом

$$E_{\text{авт}} = \frac{\alpha^2 \rho_1 R^5}{t^2} \int_1^{\xi_1} G \left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)}\right] 4\pi\xi^2\, d\xi$$

(ср. (106,11)). Интеграл здесь — постоянное число [2]). Поэтому находим, что

$$E_{\text{авт}} \propto R^{5-2/\alpha} \propto (-t)^{5\alpha-2}. \quad (107,15)$$

Для всех реальных значений γ, показатель степени здесь положителен. Хотя интенсивность самой ударной волны растет по мере ее приближения к центру, но в то же время уменьшается объем области автомодельного движения и это приводит к уменьшению полной заключенной в ней энергии.

После фокусировки в центре возникает «отраженная» ударная волна, расширяющаяся (при $t > 0$) навстречу движущемуся к центру газу. Движение в этой стадии тоже автомодельно, с тем же показателем автомодельности α, так что закон расширения $R \propto t^{\alpha}$. Более подробным исследованием этого движения мы здесь заниматься не будем [3]).

Таким образом, рассмотренная задача дает пример автомодельного движения, в котором, однако, показатель автомодельности (т. е. вид автомодельной переменной ξ) не может быть

[1]) Предельное значение отношения ρ/ρ_1 в момент фокусировки равно 20,1 для $\gamma = 7/5$ и 9,55 для $\gamma = 5/3$.

[2]) Интеграл расходится при $\xi_1 \to \infty$. Это обстоятельство — следствие неприменимости автомодельного режима на расстояниях $r \gg R$.

[3]) Укажем лишь, что отражение ударной волны сопровождается дальнейшим сжатием вещества, достигающим 145 для $\gamma = 7/5$ и 32,7 для $\gamma = 5/3$.

определен из соображений размерности; он определяется лишь в результате решения самих уравнений движения, с учетом условий, диктуемых физической постановкой задачи. С математической точки зрения характерно, что эти условия формулируются как требование прохождения интегральной кривой дифференциального уравнения первого порядка через его особую точку. При этом показатель автомодельности оказывается, вообще говоря, иррациональным числом [1]).

§ 108. Теория «мелкой воды»

Замечательную аналогию движению сжимаемого газа представляет движение в поле тяжести несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, если глубина слоя жидкости достаточно мала (мала по сравнению с характеристическими размерами задачи, например, по сравнению с размерами неровностей дна водоема). В этом случае поперечной компонентой скорости жидкости можно пренебречь по сравнению с продольной (вдоль слоя) скоростью, а последнюю можно считать постоянной вдоль толщины слоя. В этом приближении (называемом гидравлическим) жидкость можно рассматривать как «двухмерную» среду, обладающую в каждой точке определенной скоростью $\mathbf{v}$ и, кроме того, характеризующуюся в каждой точке значением величины h — толщины слоя.

Соответствующие общие уравнения движения отличаются от уравнений, полученных в § 12, лишь тем, что изменения величин при движении не должны предполагаться малыми, как это делалось в § 12 при изучении длинных гравитационных волн малой амплитуды; в связи с этим в уравнении Эйлера должны быть сохранены члены второго порядка по скорости. В частности, для одномерного движения жидкости в канале, зависящего только от одной координаты x (и времени), эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (vh)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{108,1}$$

(глубина h предполагается здесь постоянной вдоль ширины канала).

Длинные гравитационные волны представляют собой, с общей точки зрения, малые возмущения движения рассматриваемой системы. Результаты § 12 показывают, что такие возмущения рас-

[1]) Другой пример автомодельного движения такого рода представляет задача о распространении ударной волны, создаваемой в результате короткого сильного удара по полупространству, заполненному газом (*Зельдович Я. Б.* — Акустич. журнал, 1956, т. 2, с. 29). Изложение этой задачи можно найти также в указанной на стр. 461 книге *Я. Б. Зельдовича* и *Ю. П. Райзера* (гл. XII) и в книге *Баренблатта Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1982, сл. 4.