определен из соображений размерности; он определяется лишь в результате решения самих уравнений движения, с учетом условий, диктуемых физической постановкой задачи. С математической точки зрения характерно, что эти условия формулируются как требование прохождения интегральной кривой дифференциального уравнения первого порядка через его особую точку. При этом показатель автомодельности оказывается, вообще говоря, иррациональным числом [1]).

§ 108. Теория «мелкой воды»

Замечательную аналогию движению сжимаемого газа представляет движение в поле тяжести несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, если глубина слоя жидкости достаточно мала (мала по сравнению с характеристическими размерами задачи, например, по сравнению с размерами неровностей дна водоема). В этом случае поперечной компонентой скорости жидкости можно пренебречь по сравнению с продольной (вдоль слоя) скоростью, а последнюю можно считать постоянной вдоль толщины слоя. В этом приближении (называемом гидравлическим) жидкость можно рассматривать как «двухмерную» среду, обладающую в каждой точке определенной скоростью $\mathbf{v}$ и, кроме того, характеризующуюся в каждой точке значением величины h — толщины слоя.

Соответствующие общие уравнения движения отличаются от уравнений, полученных в § 12, лишь тем, что изменения величин при движении не должны предполагаться малыми, как это делалось в § 12 при изучении длинных гравитационных волн малой амплитуды; в связи с этим в уравнении Эйлера должны быть сохранены члены второго порядка по скорости. В частности, для одномерного движения жидкости в канале, зависящего только от одной координаты x (и времени), эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (vh)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{108,1}$$

(глубина h предполагается здесь постоянной вдоль ширины канала).

Длинные гравитационные волны представляют собой, с общей точки зрения, малые возмущения движения рассматриваемой системы. Результаты § 12 показывают, что такие возмущения рас-

[1]) Другой пример автомодельного движения такого рода представляет задача о распространении ударной волны, создаваемой в результате короткого сильного удара по полупространству, заполненному газом (*Зельдович Я. Б.* — Акустич. журнал, 1956, т. 2, с. 29). Изложение этой задачи можно найти также в указанной на стр. 461 книге *Я. Б. Зельдовича* и *Ю. П. Райзера* (гл. XII) и в книге *Баренблатта Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1982, гл. 4.

пространяются относительно жидкости с конечной скоростью, равной

$$c = \sqrt{gh}. \tag{108,2}$$

Эта скорость играет здесь роль скорости звука в газодинамике. Так же, как это было сделано в § 82, мы можем заключить, что если жидкость движется со скоростями $v < c$ (так называемое *спокойное течение*), то влияние возмущений распространяется на весь поток как вниз, так и вверх по течению. При движении же со скоростями $v > c$ (*стремительное течение*) влияние возмущений распространяется лишь на определенные области потока вниз по течению.

Давление p (отсчитываемое от атмосферного давления на свободной поверхности) меняется по глубине жидкости согласно гидростатическому закону $p = \rho g(h - z)$, где z — высота точки над дном. Полезно заметить, что если ввести величины

$$\bar{\rho} = \rho h, \qquad \bar{p} = \int_0^h p\,dz = \frac{1}{2}\rho g h^2 = \frac{g}{2\rho}\bar{\rho}^2, \tag{108,3}$$

то уравнения (108,1) примут вид

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}v\bar{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}, \tag{108,4}$$

формально совпадающий с видом уравнений адиабатического течения политропного газа с $\gamma = 2$ ($\bar{p} \propto \bar{\rho}^2$). Это обстоятельство позволяет непосредственно переносить в теорию «мелкой воды» все газодинамические результаты, относящиеся к движению без образования ударных волн. Для последних соотношения в теории *мелкой воды* отличаются от газодинамических соотношений для идеального газа.

«Ударная волна» в текущей по каналу жидкости представляет собой резкий скачок высоты жидкости h, а с нею и ее скорости v (так называемый *прыжок воды*). Соотношения между значениями этих величин по обе стороны разрыва можно получить с помощью условий непрерывности потоков массы и импульса жидкости. Плотность потока массы (отнесенная к 1 см ширины канала) есть $j = \rho v h$. Плотность же потока импульса получается интегрированием $p + \rho v^2$ по глубине жидкости и равна

$$\int_0^h (p + \rho v^2)\,dz = \frac{\rho g h^2}{2} + \rho v^2 h.$$

Поэтому условия их непрерывности дают два уравнения:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2, \qquad v_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2}. \tag{108,5}$$

Эти соотношения устанавливают связь между четырьмя величинами: v_1, v_2, h_1, h_2, две из которых могут быть заданы произвольно. Выражая скорости v_1, v_2 через высоты h_1, h_2, получим:

$$v_1^2 = \frac{g}{2}\frac{h_2}{h_1}(h_1 + h_2), \qquad v_2^2 = \frac{g}{2}\frac{h_1}{h_2}(h_1 + h_2). \tag{108,6}$$

Потоки же энергии по обе стороны разрыва неодинаковы; их разность определяет количество энергии, диссипируемой (в 1 с) в разрыве. Плотность потока энергии вдоль канала равна

$$q = \int_0^h \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)\rho v\, dz = \frac{1}{2} j (gh + v^2).$$

Воспользовавшись выражениями (108,6), получим для искомой разности

$$q_1 - q_2 = \frac{gj}{4h_1h_2}\left(h_1^2 + h_2^2\right)\left(h_2 - h_1\right).$$

Пусть жидкость движется через разрыв со стороны *1* на сторону *2*. Тогда тот факт, что энергия диссипируется, означает, что должно быть $q_1 - q_2 > 0$, и мы приходим к выводу, что

$$h_2 > h_1, \tag{108,7}$$

т. е. жидкость движется со стороны меньшей на сторону большей высоты. Из (108,6) можно теперь заключить, что

$$v_1 > c_1 = \sqrt{gh_1}, \qquad v_2 < c_2 = \sqrt{gh_2} \tag{108,8}$$

в полной аналогии с газодинамическими ударными волнами. Неравенства (108,8) можно было бы найти и как необходимое условие устойчивости разрыва, подобно тому как это было сделано в § 88.

Задача

Найти условие устойчивости тангенциального разрыва на мелкой воде — линии, вдоль которой жидкость по обе стороны от нее движется с различными скоростями (*С. В. Безденков, О. П. Погуце*, 1983).

Решение. Ввиду указанной в тексте аналогии между гидродинамикой мелкой воды и динамикой сжимаемого политропного газа, поставленная задача эквивалентна задаче об устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемом газе (задача 1 к § 84). Отличие состоит, однако, в том, что в случае мелкой воды должны рассматриваться возмущения, зависящие лишь от координат в плоскости жидкого слоя (вдоль скорости $\mathbf{v}$ и перпендикулярно к ней), но не от координаты z вдоль глубины слоя [1]): приближению мелкой воды отвечают возмущения с длиной волны $\lambda \gg h$. Поэтому найденная в задаче к § 84 скорость v_k оказывается теперь границей неустойчивости: разрыв устойчив при $v > v_k$ (v — скачок скорости на разрыве). Поскольку плотность и глубина жидкости по обе стороны разрыва одинаковы, то роль звуковой скорости по обе стороны от него играет одна и та же величина $c_1 = c_2 = \sqrt{gh}$, так что разрыв устойчив при

$$v > 2\sqrt{2gh}.$$

[1]) В задаче к § 84 ей соответствовала координата y.