ГЛАВА X

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

§ 97. Истечение газа через сопло

Рассмотрим стационарное вытекание газа из большого сосуда через трубку переменного сечения, или, как говорят, через *сопло*. Мы будем предполагать, что движение газа можно считать в каждом месте трубы однородным по ее сечению, а скорость — направленной практически вдоль оси трубы. Для этого труба должна быть не слишком широка, и площадь S ее сечения должна достаточно медленно меняться вдоль ее длины. Таким образом, все величины, характеризующие течение, будут функциями только от координаты вдоль оси трубы. При этих условиях можно применять полученные в § 83 соотношения, имеющие место вдоль линии тока, непосредственно к изменению величин вдоль длины трубы.

Количество (масса) газа, проходящего в единицу времени через поперечное сечение трубы, или, как говорят, расход газа, равно $Q = \rho v S$; эта величина должна, очевидно, оставаться постоянной вдоль всей трубы:

$$Q = S\rho v = \mathrm{const}. \qquad (97,1)$$

Линейные размеры самого сосуда предполагаются очень большими по сравнению с диаметром трубы. Поэтому скорость газа в сосуде можно считать равной нулю, и соответственно этому все величины с индексом нуль в формулах § 83 будут представлять собой значения соответствующих величин внутри сосуда.

Мы видели, что плотность потока $j = \rho v$ не может превышать некоторого предельного значения j_*. Ясно поэтому, что и возможные значения полного расхода газа Q будут иметь (для данной трубы и при заданном состоянии газа внутри сосуда) верхнюю границу $Q_{\max}$, которую легко определить. Если бы значение j_* плотности потока было достигнуто не в самом узком месте трубы, то в сечениях с меньшим S было бы $j > j_*$, что невозможно. Поэтому значение $j = j_*$ может быть достигнуто только в самом узком месте трубы, площадь сечения которого обозначим посредством $S_{\min}$. Таким образом, верхняя граница полного расхода газа есть

$$Q_{\max} = \rho_* v_* S_{\min} = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} S_{\min}, \qquad (97,2)$$

Рассмотрим сначала сопло, монотонно суживающееся по направлению к своему внешнему концу, так что минимальная площадь сечения достигается на этом конце (рис. 70). В силу (97,1) плотность потока j монотонно возрастает вдоль трубы. То же самое касается скорости газа v, а давление соответственно монотонно падает. Наибольшее возможное значение j будет достигнуто, если скорость v достигает значения c как раз на выходном конце трубы, т. е. если будет $v_1 = c_1 = v_*$ (буквы с индексом 1 обозначают значения величин на выходном конце трубы). Одновременно будет и $p = p_*$.

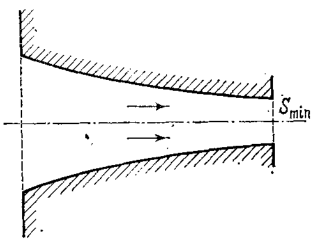

Рис. 70

Проследим за изменением режима вытекания газа при уменьшении давления p_e внешней среды, в которую газ выпускается. При уменьшении внешнего давления от значения, равного давлению p_0 в сосуде, и вплоть до значения p_* одновременно с ним падает также и давление p_1 в выходном сечении трубы, причем оба эти давления (p_1 и p_e) остаются равными друг другу; другими словами, вс падение давления от p_0 до внешнего происходит внутри сопла. Выходная же скорость v_1 и полный расход газа $Q = j_1 S_{min}$ монотонно возрастают. При $p_e = p_*$ выходная скорость делается равной местному значению скорости звука, а расход газа — значению Q_{max}. При дальнейшем понижении внешнего давления выходное давление перестает падать и остается все время равным p_*; падение же давления от p_* до p_e происходит уже вне трубы, в окружающем пространстве. Другими словами, ни при каком внешнем давлении падение давления газа в трубе не может быть бо́льшим, чем от p_0 до p_*; так, для воздуха ($p_* = 0{,}53\ p_0$) максимальное падение давления составляет $0{,}47\ p_0$. Выходная скорость и расход газа тоже остаются (при $p_e < p_*$) постоянными. Таким образом, при истечении через суживающееся сопло газ не может приобрести сверхзвуковой скорости.

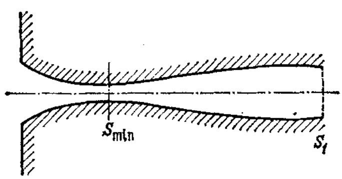

Рис. 71

Невозможность достижения сверхзвуковых скоростей при выпускании газа через суживающееся сопло связана с тем, что скорость, равная местной скорости звука, может достигаться только на самом выходном конце такой трубы. Ясно, что сверхзвуковая скорость сможет быть достигнута с помощью сопла сначала суживающегося, а затем вновь расширяющегося (рис. 71). Такие сопла называются *соплами Лаваля*.

Максимальная плотность потока j_*, если и достигается, то опять-таки только в наиболее узком сечении, так что и в таком сопле расход газа не может превышать значения $S_{\min} j_*$. В суживающейся части сопла плотность потока возрастает (а давление падает); на кривой рис. 72, изображающей зависимость j от p [1]), это соответствует передвижению от точки c по направлению к b. Если в сечении $S_{\min}$ достигается максимальный поток (точка b на рис. 72), то в расширяющейся части сопла давление будет продолжать падать и начнет падать также и j соответственно перемещению по кривой рис. 72 от точки b по направлению к a. На выходном конце трубы поток j приобретает тогда вполне определенное значение, равное

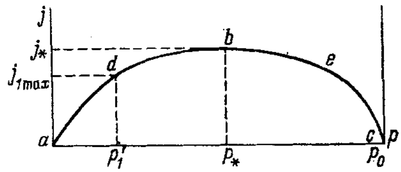

Рис. 72

$$j_{1\max} = j_* \frac{S_{\min}}{S_1},$$

а давление — соответствующее этому потоку значение, обозначенное на рис. 72 посредством p_1' (некоторая точка d на кривой). Если же в сечении $S_{\min}$ достигается лишь некоторая точка e, то в расширяющейся части сопла давление будет возрастать соответственно обратному перемещению по кривой вниз от точки e. На первый взгляд могло бы показаться, что с ветви cb кривой можно перейти на ветвь ab скачком, минуя точку b, посредством образования ударной волны; это, однако, невозможно, так как «втекающий» в ударную волну газ не может иметь дозвуковой скорости.

Имея в виду все эти замечания, проследим теперь за изменением режима вытекания по мере постепенного увеличения внешнего давления p_e. При малых давлениях, начиная от нуля и до значения $p_e = p_1'$, устанавливается режим, при котором в сечении $S_{\min}$ достигается давление p_* и скорость $v_* = c_*$. В расширяющейся части сопла скорость продолжает расти, так что осуществляется сверхзвуковое течение газа, а давление продолжает соответственно падать, достигая на выходном конце значения p_1' вне зависимости от величины p_e. Падение давления от p_1' до p_e происходит вне сопла, в отходящей от края его отверстия волне разрежения (как это будет описано в § 112).

Когда p_e начинает превышать значение p_1', появляется отходящая от края отверстия сопла косая ударная волна, сжимающая газ от выходного давления p_1' до давления p_e (§ 112). Мы

[1]) Согласно формулам (83,15—17) уравнение этой зависимости:

$$j = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_0 \rho_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}.$$

увидим, однако, что стационарная ударная волна может отходить от твердой поверхности лишь постольку, поскольку она не обладает слишком большой интенсивностью (§ 111). Поэтому при дальнейшем повышении внешнего давления ударная волна скоро начинает передвигаться внутрь сопла, причем перед ней, на внутренней поверхности сопла, возникает отрыв. При некотором значении p_e ударная волна достигает наиболее узкого сечения сопла и затем исчезает; течение становится всюду дозвуковым с отрывом на стенках расширяющейся (диффузорной) части сопла. Все эти сложные явления имеют уже, разумеется, существенно трехмерный характер.

Задача

На малом участке длины трубы к стационарно текущему по ней газу подводится небольшое количество тепла. Определить изменение скорости газа при прохождении им этого участка. Газ предполагается политропным.

Решение. Пусть Sq есть подводимое в единицу времени количество тепла (S — площадь сечения трубы в данном ее участке). На обеих сторонах участка подогрева одинаковы плотности потока массы $j = \rho v$ и потока импульса $p + jv$; отсюда $\Delta p = -j\Delta v$, где Δ обозначает изменение величины при прохождении этого участка. Разность же плотностей потока энергии $(w + v^2/2)j$ равна q. Написав w в виде

$$w = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} = \frac{\gamma p v}{(\gamma-1) j},$$

получим (считая Δv и Δp малыми):

$$vj\,\Delta v + \frac{\gamma}{\gamma-1}(p\,\Delta v + v\,\Delta p) = q.$$

Исключая Δp из этих двух соотношений, найдем:

$$\Delta v = \frac{(\gamma-1)\,q}{\rho\,(c^2 - v^2)}.$$

Мы видим, что при дозвуковом течении подвод тепла ускоряет поток ($\Delta v > 0$), а при сверхзвуковом — замедляет.

Написав температуру газа в виде $T = \mu p/R\rho = \mu p v/Rj$ (R — газовая постоянная), найдем для ее изменения выражение

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\,\Delta p + p\,\Delta v) = \frac{\mu(\gamma-1)\,q}{Rj\,(c^2 - v^2)}\left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2\right).$$

При сверхзвуковом движении это выражение всегда положительно — температура газа повышается; при дозвуковом же движении оно может быть как положительным, так и отрицательным.

§ 98. Вязкое движение сжимаемого газа по трубе

Рассмотрим течение сжимаемого газа по трубе (постоянного сечения) настолько длинной, что нельзя пренебрегать трением газа о стенки, т. е. вязкостью газа. Стенки трубы мы будем предполагать теплоизолированными, так что никакого обмена теплом между газом и внешней средой не происходит.