увидим, однако, что стационарная ударная волна может отходить от твердой поверхности лишь постольку, поскольку она не обладает слишком большой интенсивностью (§ 111). Поэтому при дальнейшем повышении внешнего давления ударная волна скоро начинает передвигаться внутрь сопла, причем перед ней, на внутренней поверхности сопла, возникает отрыв. При некотором значении p_e ударная волна достигает наиболее узкого сечения сопла и затем исчезает; течение становится всюду дозвуковым с отрывом на стенках расширяющейся (диффузорной) части сопла. Все эти сложные явления имеют уже, разумеется, существенно трехмерный характер.

Задача

На малом участке длины трубы к стационарно текущему по ней газу подводится небольшое количество тепла. Определить изменение скорости газа при прохождении им этого участка. Газ предполагается политропным.

Решение. Пусть Sq есть подводимое в единицу времени количество тепла (S — площадь сечения трубы в данном ее участке). На обеих сторонах участка подогрева одинаковы плотности потока массы $j = \rho v$ и потока импульса $p + jv$; отсюда $\Delta p = -j\Delta v$, где Δ обозначает изменение величины при прохождении этого участка. Разность же плотностей потока энергии $(w + v^2/2)j$ равна q. Написав w в виде

$$w = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{\gamma p v}{(\gamma - 1) j},$$

получим (считая Δv и Δp малыми):

$$vj\,\Delta v + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p\,\Delta v + v\,\Delta p) = q.$$

Исключая Δp из этих двух соотношений, найдем:

$$\Delta v = \frac{(\gamma - 1) q}{\rho (c^2 - v^2)}.$$

Мы видим, что при дозвуковом течении подвод тепла ускоряет поток ($\Delta v > 0$), а при сверхзвуковом — замедляет.

Написав температуру газа в виде $T = \mu p/R\rho = \mu p v/Rj$ (R — газовая постоянная), найдем для ее изменения выражение

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\,\Delta p + p\,\Delta v) = \frac{\mu(\gamma - 1) q}{Rj(c^2 - v^2)}\left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2\right).$$

При сверхзвуковом движении это выражение всегда положительно — температура газа повышается; при дозвуковом же движении оно может быть как положительным, так и отрицательным.

§ 98. Вязкое движение сжимаемого газа по трубе

Рассмотрим течение сжимаемого газа по трубе (постоянного сечения) настолько длинной, что нельзя пренебрегать трением газа о стенки, т. е. вязкостью газа. Стенки трубы мы будем предполагать теплоизолированными, так что никакого обмена теплом между газом и внешней средой не происходит.

При скоростях течения порядка или превышающих скорость звука (о которых только и идет здесь речь) течение газа по трубе является, конечно, турбулентным (если только радиус трубы не слишком мал). Турбулентность движения будет существенна здесь для нас только в одном отношении. Именно, мы видели в § 43, что при турбулентном течении скорость (средняя) практически постоянна почти по всему сечению трубы и быстро падает до нуля лишь на очень близких расстояниях от стенок. На этом основании мы будем считать скорость течения v просто постоянной по всему сечению трубы, определив ее так, чтобы произведение $S\rho v$ (S — площадь сечения) было равно полному расходу газа через сечение трубы.

Поскольку полный расход газа $S\rho v$ постоянен вдоль всей длины трубы, а S постоянно по предположению, то должна быть постоянной также и плотность потока газа

$$j = \rho v = \text{const}. \tag{98,1}$$

Далее, поскольку труба теплоизолирована, то вдоль нее должен быть постоянным также и полный поток энергии, переносимой газом через поперечное сечение трубы. Этот поток равен $S\rho v(w + v^2/2)$, и ввиду (98,1) можно написать:

$$w + \frac{v^2}{2} = w + \frac{j^2V^2}{2} = \text{const}. \tag{98,2}$$

Что же касается энтропии газа s, то благодаря наличию внутреннего трения она, конечно, отнюдь не остается постоянной, а возрастает по мере движения газа вперед по трубе. Если x — координата вдоль оси трубы, причем положительное направление оси x совпадает с направлением течения, то

$$\frac{ds}{dx} > 0. \tag{98,3}$$

Продифференцируем теперь соотношение (98,2) по x. Помня, что $dw = T\,ds + V\,dp$, имеем:

$$T\frac{ds}{dx} + V\frac{dp}{dx} + j^2V\frac{dV}{dx} = 0.$$

Далее, подставляя сюда

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}, \tag{98,4}$$

получаем:

$$\left[T + j^2V\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\right]\frac{ds}{dx} = -V\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]\frac{dp}{dx}. \tag{98,5}$$

Согласно известной термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Коэффициент теплового расширения газов положителен. Поэтому в силу (98,3) заключаем, что положительно также и все выражение в левой стороне равенства (98,5). Знак же производной dp/dx совпадет, следовательно, со знаком выражения

$$-\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right] = \frac{v^2}{c^2} - 1.$$

Мы видим, что

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad \text{при} \quad v < c, \qquad \frac{dp}{dx} > 0 \quad \text{при} \quad v > c. \tag{98,6}$$

Таким образом, при дозвуковом течении давление падает вниз по течению (как и для несжимаемой жидкости). При сверхзвуковом же движении давление возрастает вдоль трубы.

Аналогичным образом можно установить знак производной dv/dx. Ввиду того, что $j = v/V = \text{const}$, знак dv/dx совпадает со знаком производной dV/dx. Последняя же может быть выражена через положительную производную ds/dx с помощью (98,4—5). В результате мы найдем, что

$$\frac{dv}{dx} > 0 \quad \text{при} \quad v < c, \qquad \frac{dv}{dx} < 0 \quad \text{при} \quad v > c, \tag{98,7}$$

т. е. скорость возрастает вниз по течению при дозвуковом и падает при сверхзвуковом движении.

Любые две термодинамические величины текущего вдоль трубы газа являются функциями друг от друга, совершенно не зависящими, в частности, от закона сопротивления трубы. Эти функции зависят как от параметра от значения постоянной j и определяются уравнением $w + j^2V^2/2 = \text{const}$, получающимся путем исключения скорости из уравнений сохранения массы и энергии газа.

Выясним характер, который имеют кривые зависимости, например, энтропии от давления. Переписав (98,5) в виде

$$\frac{ds}{dp} = V\frac{\dfrac{v^2}{c^2} - 1}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p},$$

мы видим, что в точке, где $v = c$, энтропия имеет экстремум. Легко видеть, что этот экстремум является максимумом. Действительно, для значения второй производной от s по p имеем в этой точке:

$$\left.\frac{d^2s}{dp^2}\right|_{v=c} = -\frac{j^2V\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p} < 0$$

(что связано с предполагающейся везде положительностью производной $(\partial^2V/\partial p^2)_s$).

Таким образом, кривые зависимости s от p имеют вид, изображенный на рис. 73. Справа от максимумов лежит область дозвуковых, а слева — сверхзвуковых скоростей. При увеличении параметра j мы переходим от более высоких к более низко расположенным кривым. Действительно, продифференцировав уравнение (98,2) по j при постоянном p, получим:

$$\frac{ds}{dj} = -\frac{jV^2}{T + j^2 V \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p} < 0.$$

Из полученных результатов можно сделать интересный вывод. Пусть на входе трубы скорость газа меньше скорости звука. По направлению вниз по течению энтропия растет, а давление падает; это соответствует передвижению по правой ветви кривой $s = s(p)$ по направлению от B к O (рис. 73). Так может, однако, продолжаться лишь до тех пор, пока энтропия не достигнет своего максимального значения. Дальнейшее передвижение по кривой за точку O (т. е. в область сверхзвуковых скоростей) невозможно, так как оно соответствовало бы уменьшению энтропии газа по мере его течения по трубе. Переход с ветви BO на ветвь OA кривой не может произойти также и посредством возникновения ударной волны, так как скорость «втекающего» в ударную волну газа не может быть дозвуковой.

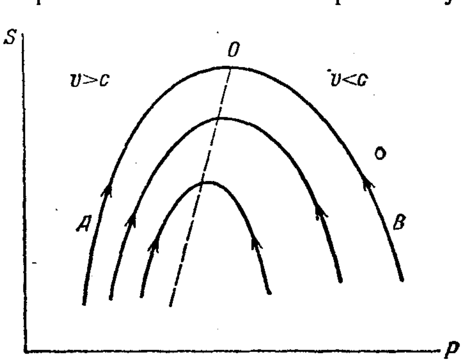

Рис. 73

Таким образом, мы приходим к выводу, что если на входе трубы скорость газа меньше скорости звука, то движение остается дозвуковым и на всем дальнейшем ее протяжении. Скорость, равная местной скорости звука, если и достигается вообще, то только на выходном конце трубы (при достаточно низком давлении во внешней среде, в которую выпускается газ).

Для того чтобы осуществить сверхзвуковое течение газа по трубе, необходимо впускать газ в трубу уже со сверхзвуковой скоростью. В связи с общими свойствами сверхзвукового движения (невозможностью распространения возмущений вверх по течению) дальнейшее течение газа будет происходить совершенно независимо от условий на выходе из трубы. В частности, будет происходить совершенно определенным образом возрастание энтропии вдоль длины трубы, и максимальное ее значение будет достигнуто на определенном расстоянии $x = l_k$ от входа. Если полная длина трубы $l < l_k$, то течение будет сверхзвуковым на всем ее протяжении (чему соответствует перемещение по ветви AO по направлению от A к O). Если же $l > l_k$, то течение не может быть сверхзвуковым на всем протяжении трубы и в то же время не может перейти плавным образом в дозвуковое, так как передвигаться по ветви OB кривой можно лишь в направлении, указанном стрелкой. Поэтому в этом случае неизбежно возникновение ударной волны, переводящей движение скачком из сверх- в дозвуковое. При этом давление возрастает, мы переходим с ветви AO на ветвь BO, минуя точку O, и на всем остальном протяжении трубы течение будет дозвуковым.

§ 99. Одномерное автомодельное движение

Важную категорию одномерных нестационарных движений сжимаемого газа составляют течения, происходящие в условиях, характеризующихся какими-либо параметрами скорости, но не длины. Простейший пример такого движения представляет движение газа в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой, возникающее, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью.

Наряду с параметром скорости такое течение определяется ещё и параметрами, дающими, скажем, давление и плотность газа в начальный момент времени. Однако из всех этих параметров нельзя составить никаких комбинаций с размерностью длины или времени. Отсюда следует, что распределения всех величин могут зависеть от координаты x и времени t только в виде их отношения x/t, имеющего размерность скорости. Другими словами, эти распределения в различные моменты времени будут подобны друг другу, отличаясь лишь своим масштабом вдоль оси x, увеличивающимся пропорционально времени. Можно сказать, что если измерять длины в единицах, растущих пропорционально t, то картина движения вообще не будет меняться — движение автомодельно.

Уравнение сохранения энтропии для движения, зависящего только от одной координаты x, гласит:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Считая, что все величины зависят только от переменной $\xi = x/t$, и замечая, что при этом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t}\frac{d}{d\xi},$$

будем иметь $(v_x - \xi)s' = 0$ ($'$ означает дифференцирование