полная длина трубы $l < l_k$, то течение будет сверхзвуковым на всем ее протяжении (чему соответствует перемещение по ветви AO по направлению от A к O). Если же $l > l_k$, то течение не может быть сверхзвуковым на всем протяжении трубы и в то же время не может перейти плавным образом в дозвуковое, так как передвигаться по ветви OB кривой можно лишь в направлении, указанном стрелкой. Поэтому в этом случае неизбежно возникновение ударной волны, переводящей движение скачком из сверх- в дозвуковое. При этом давление возрастает, мы переходим с ветви AO на ветвь BO, минуя точку O, и на всем остальном протяжении трубы течение будет дозвуковым.

§ 99. Одномерное автомодельное движение

Важную категорию одномерных нестационарных движений сжимаемого газа составляют течения, происходящие в условиях, характеризующихся какими-либо параметрами скорости, но не длины. Простейший пример такого движения представляет движение газа в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой, возникающее, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью.

Наряду с параметром скорости такое течение определяется ещё и параметрами, дающими, скажем, давление и плотность газа в начальный момент времени. Однако из всех этих параметров нельзя составить никаких комбинаций с размерностью длины или времени. Отсюда следует, что распределения всех величин могут зависеть от координаты x и времени t только в виде их отношения x/t, имеющего размерность скорости. Другими словами, эти распределения в различные моменты времени будут подобны друг другу, отличаясь лишь своим масштабом вдоль оси x, увеличивающимся пропорционально времени. Можно сказать, что если измерять длины в единицах, растущих пропорционально t, то картина движения вообще не будет меняться — движение автомодельно.

Уравнение сохранения энтропии для движения, зависящего только от одной координаты x, гласит:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Считая, что все величины зависят только от переменной $\xi = x/t$, и замечая, что при этом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t}\frac{d}{d\xi},$$

будем иметь $(v_x - \xi)s' = 0$ ($'$ означает дифференцирование по ξ). Отсюда $s'=0$, т. е. $s=\text{const}$ [1]; таким образом, автомодельное одномерное движение не только адиабатично, но и изэнтропично. Аналогично из y- и z-компонент уравнения Эйлера.

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}=0$$

найдем, что v_y и v_z постоянны; не ограничивая общности, мы можем положить их в дальнейшем равными нулю.

Далее, уравнение непрерывности и x-компонента уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial x}=0, \tag{99,1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{99,2}$$

(здесь и ниже пишем просто v вместо v_x). После введения переменной ξ они примут вид

$$(v-\xi)\rho'+\rho v'=0, \tag{99,3}$$

$$(v-\xi)v'=-\frac{p'}{\rho}=-\frac{c^2}{\rho}\rho'. \tag{99,4}$$

(Имея в виду постоянство энтропии, пишем во втором уравнении $p'=(\partial p/\partial\rho)_s\rho'=c^2\rho'$.)

Эти уравнения имеют, прежде всего, тривиальное решение $v=\text{const}$, $\rho=\text{const}$ — однородный поток с постоянной скоростью. Для нахождения же нетривиального решения исключаем из уравнений ρ' и v' и получаем равенство $(v-\xi)^2=c^2$, откуда $\xi=v\pm c$. Мы будем писать это соотношение со знаком плюс:

$$\frac{x}{t}=v+c \tag{99,5}$$

(выбор знака означает, что мы принимаем определенное условие для выбора положительного направления оси x, смысл которого выяснится ниже). Наконец, подставляя $v-\xi=-c$ в (99,3), получим $c\rho'=\rho v'$ или $\rho\,dv=c\,d\rho$. Скорость звука является функцией термодинамического состояния газа; выбрав в качестве основных термодинамических величин энтропию s и плотность ρ, мы можем представить скорость звука в виде функции плотности $c(\rho)$ при заданном постоянном значении энтропии. Подразумевая под c такую функцию, пишем на основании полученного равенства

$$v=\int\frac{c\,d\rho}{\rho}=\int\frac{dp}{c\rho}. \tag{99,6}$$

[1]) Предположение же $v_x-\xi=0$ противоречило бы остальным уравнениям движения: из (99,3) получилось бы $v_x=\text{const}$ в противоречие со сделанным предположением.

Эту формулу можно написать также и в виде

$$v = \int \sqrt{-dp\,dV}, \tag{99,7}$$

где не предрешается выбор независимого переменного.

Формулы (99,5—6) определяют искомое решение уравнений движения. Если функция $c(\rho)$ известна, то по формуле (99,6) вычисляем скорость v как функцию плотности. Уравнение (99,5) определит тогда в неявном виде зависимость плотности от x/t, после чего определится зависимость также и всех остальных величин от x/t.

Выясним некоторые общие свойства полученного решения. Дифференцируя уравнение (99,5) по x, получаем:

$$t \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{d(v+c)}{d\rho} = 1. \tag{99,8}$$

Для производной от $v+c$ имеем с помощью (99,6)

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{c}{\rho} + \frac{dc}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho c)}{d\rho}.$$

Но

$$\rho c = \rho \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \frac{1}{\sqrt{-\partial V/\partial p}};$$

дифференцируя это выражение, получим:

$$\frac{d(\rho c)}{d\rho} = c^2 \frac{d(\rho c)}{dp} = \frac{\rho^3 c^5}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s. \tag{99,9}$$

Таким образом:

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{\rho^2 c^5}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \tag{99,10}$$

Из (99,8) следует поэтому, что при $t > 0$ будет $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$. Замечая, что $\frac{\partial p}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$, заключаем, что и $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$. Наконец, имеем $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$, так что $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$. Таким образом, имеем неравенства:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0. \tag{99,11}$$

Смысл этих неравенств становится более ясным, если следить не за изменением величин вдоль оси x (при заданном t), а за их изменением с течением времени у данного передвигающегося в пространстве элемента газа. Эти изменения определяются полными производными по времени; так, для плотности имеем, воспользовавшись уравнением непрерывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Согласно третьему из неравенств (99,11) эта величина отрицательна; вместе с ней, разумеется, отрицательна и производная $\frac{dp}{dt}$:

$$\frac{d\rho}{dt} < 0, \quad \frac{dp}{dt} < 0. \tag{99,12}$$

Аналогичным образом (используя уравнение Эйлера (99,2)) можно убедиться, что $dv/dt < 0$; это, однако, не означает, что абсолютная величина скорости падает со временем, так как v может быть отрицательной.

Неравенства (99,12) показывают, что плотность и давление каждого элемента газа падают по мере его передвижения в пространстве. Другими словами, передвижение газа сопровождается его монотонным разрежением. Поэтому рассматриваемое движение можно назвать *нестационарной волной разрежения*[1]).

Волна разрежения может простираться лишь на конечное расстояние вдоль оси x; это видно уже из того, что формула (99,5) привела бы при $x \to \pm\infty$ к бессмысленному результату — бесконечной скорости.

Применим формулу (99,5) к плоскости, ограничивающей занимаемую волной разрежения область пространства. При этом x/t будет представлять собой скорость движения этой границы относительно выбранной неподвижной системы координат. Скорость же ее относительно самого газа есть разность $x/t - v$ и согласно (99,5) равна как раз местной скорости звука. Это значит, что границы волны разрежения представляют собой слабые разрывы. Картина автомодельного движения в различных конкретных случаях складывается, следовательно, из волн разрежения и областей постоянного течения, разделенных между собой поверхностями слабых разрывов (кроме того, конечно, могут иметься и различные области постоянного течения, разделенные между собой ударными волнами).

Сделанный нами выбор знака в формуле (99,5) соответствует, как теперь видно, тому, что эти слабые разрывы предполагаются движущимися относительно газа в положительном направлении оси x. Неравенства (99,11) связаны именно с таким выбором; неравенства же (99,12), разумеется, от выбора направления оси x вообще не зависят.

Обычно приходится иметь дело с такой постановкой конкретных задач, при которой волна разрежения с одной стороны граничит с областью неподвижного газа. Пусть эта область (I на

---

[1]) Это движение может возникнуть лишь в результате наличия некоторой особенности в начальных условиях (так, в примере с поршнем в момент $t = 0$ скачком меняется скорость поршня). Обратное движение могло бы происходить лишь под действием сжимающего поршня, движущегося по вполне определенному закону.

рис. 74) находится справа от волны разрежения. Область II есть волна разрежения, а III — газ, движущийся с постоянной скоростью; стрелками на рисунке показаны направления движения газа и перемещения ограничивающих волну разрежения слабых разрывов (разрыв a движется непременно в сторону покоящегося газа, а разрыв b может двигаться в обоих направлениях в зависимости от величины достигаемой в волне разрежения скорости; ср. задачу 2). Выпишем в явном виде соотношения между различными величинами в такой волне разрежения, предполагая газ политропным. При адиабатическом процессе $\rho T^{1/(1-\gamma)} = \text{const}$. Поскольку скорость звука пропорциональна $\sqrt{T}$, то можно написать это соотношение в виде

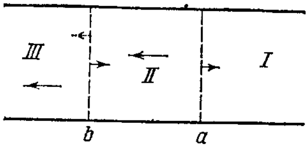

Рис. 74

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}. \tag{99,13}$$

Подставляя это выражение в интеграл (99,6), получаем:

$$v = \frac{2}{\gamma - 1} \int dc = \frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0);$$

постоянная интегрирования выбрана так, что $c = c_0$ при $v = 0$ (индексом нуль отличаем значения величин в точке, в которой газ покоится). Будем выражать все величины через v, причем надо иметь в виду, что при условленном расположении областей скорость газа направлена в отрицательную сторону оси x, так что $v < 0$. Таким образом:

$$c = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} |v|, \tag{99,14}$$

чем определяется местная скорость звука через скорость газа. Подставляя в (99,13), находим для плотности:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|v|}{c_0}\right)^{2/(\gamma-1)} \tag{99,15}$$

и аналогично для давления

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|v|}{c_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \tag{99,16}$$

Наконец, подставляя (99,14) в формулу (99,5), получаем:

$$|v| = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_0 - \frac{x}{t}\right), \tag{99,17}$$

чем определяется зависимость v от x и t.

Величина c не может быть, по самому своему существу, отрицательной. Поэтому из формулы (99,14) можно сделать существенное заключение, что скорость должна удовлетворять неравенству

$$|v| \leqslant \frac{2c_0}{\gamma - 1}; \tag{99,18}$$

при достижении скоростью этого предельного значения плотность газа (а также p и c) обращается в нуль. Таким образом, первоначально покоившийся газ при нестационарном расширении в волне разрежения может ускориться лишь до скорости, не превышающей $2c_0/(\gamma - 1)$.

Мы уже упомянули в начале параграфа простой пример автомодельного движения, возникающего в цилиндрической трубе, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью. Если поршень выдвигается из трубы, он создает за собой разрежение, и возникает описанная выше волна разрежения. Если же поршень вдвигается в трубу, он производит перед собой сжатие газа, а переход к более низкому первоначальному давлению может произойти лишь в ударной волне, которая и возникает перед поршнем, распространяясь вперед по трубе (см. задачи к этому параграфу)[1].

Задачи

1. Газ находится в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой. В начальный момент времени поршень начинает вдвигаться в трубу с постоянной скоростью U. Определить возникающее движение газа (считая газ политропным).

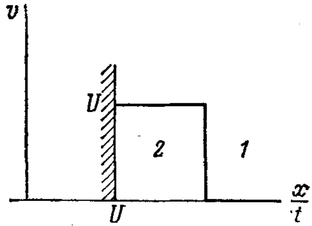

Рис. 75

Решение. Перед поршнем возникает ударная волна, передвигающаяся вперед по трубе. В начальный момент времени положения этой волны и поршня совпадают, а в дальнейшем волна «обгоняет» поршень и возникает область газа между ней и поршнем (область *2*). В области впереди от ударной волны (область *1*) давление газа равно его первоначальному значению p_1, а скорость (относительно трубы) равна нулю. В области же *2* газ движется с постоянной скоростью, равной скорости поршня U (рис. 75). Разность скоростей газов *1* и *2* равна, следовательно, тому же U и согласно формулам (85,7) и (89,1) можно написать:

$$U = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)} = (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}}.$$

---

[1]) Упомянем об аналогичной трехмерной автомодельной задаче: центрально-симметрическом движении газа, создаваемом равномерно расширяющейся сферой (*Л. И. Седов*, 1945; *G. Taylor*, 1946). Перед сферой возникает сферическая же ударная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью. В отличие от одномерного случая скорость движения газа между сферой и ударной волной не постоянна; уравнение, определяющее ее как функцию отношения r/t (а вместе с тем и скорость распространения ударной волны), не может быть проинтегрировано в аналитическом виде. См. *Седов Л. И.*, Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981, гл. IV, § 6; *Taylor G. I.* — Proc. Roy. Soc., 1946, v. A186, p. 273.

Отсюда получаем для давления p_2 газа между поршнем и ударной волной

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)U^2}{4c_1^2} + \frac{\gamma U}{c_1}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2 U^2}{16c_1^2}}.$$

Зная p_2, можно вычислить согласно формулам (89,4) скорость ударной волны относительно газов впереди и позади нее. Поскольку газ *1* покоится, то скорость волны относительно него есть скорость ее распространения по трубе. Если координата x вдоль длины трубы отсчитывается от начального места нахождения поршня (причем газ находится со стороны $x > 0$), то для положения ударной волны в момент t получим:

$$x = t\left\{\frac{\gamma+1}{4}U + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16}U^2 + c_1^2}\right\}$$

(положение же поршня есть $x = Ut$).

2. То же, если поршень выдвигается из трубы со скоростью U.

Решение. К поршню примыкает область газа (*1* на рис. 76, *а*), движущегося в отрицательном направлении оси x с постоянной скоростью $-U$, равной скорости поршня. Далее следует волна разрежения *2*, в которой газ движется в отрицательном направлении оси x со скоростью, меняющейся от значения $-U$ до нуля по линейному закону (99,17). Давление же меняется по закону (99,16) от значения

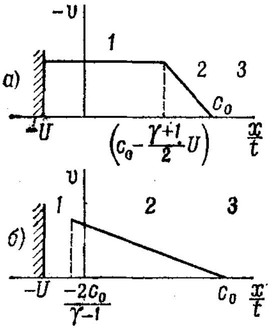

Рис. 76

$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{U}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

в газе *1* до p_0 в неподвижном газе *3*. Граница области *2* с областью *1*, определяется условием $v = -U$; согласно (99,17) получим:

$$x = \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2}U\right)t = (c-U)t$$

(c — скорость звука в газе *1*). На границе же с областью *3* $v = 0$, откуда $x = c_0 t$. Обе эти границы представляют собой слабые разрывы, из которых второй всегда распространяется вправо (т. е. в сторону от поршня); первый же (граница *1*—*2*) может распространяться как вправо (как это изображено на рис. 76, *а*), так и влево — если скорость поршня $U > 2c_0/(\gamma+1)$.

Описанная картина может иметь место только при условии $U < 2c_0/(\gamma-1)$. Если же $U > 2c_0/(\gamma-1)$, то перед поршнем образуется область вакуума (газ как бы не успевает двигаться за поршнем), простирающаяся от поршня до точки с координатой $x = -2c_0 t/(\gamma-1)$ (*1* на рис. 76, *б*). В этой точке $v = -2c_0/(\gamma-1)$; за ней следует область *2*, в которой скорость падает до нуля (в точке $x = c_0 t$), а дальше область *3* неподвижного газа.

3. Газ находится в цилиндрической трубе, не ограниченной с одной стороны ($x > 0$) и закрытой заслонкой с другой ($x = 0$). В момент времени $t = 0$ заслонка открывается, и газ выпускается в наружную среду, давление p_e которой меньше первоначального давления p_0 в трубе. Определить возникающее движение газа.

Решение. Пусть $-v_e$ есть скорость газа, соответствующая по формуле (99,16) внешнему давлению p_e; при $x = 0$, $t > 0$ должно быть $v = -v_e$. Если $v_e < 2c_0/(\gamma+1)$, то получается картина распределения скорости, изображенная на рис. 77, *а*. При $v_e = 2c_0/(\gamma+1)$ (что соответствует скорости вытекания, равной местной скорости звука на выходе трубы, — в этом легко убедиться, положив $v = c$ в формуле (99,14)) область постоянной скорости исчезает и получается картина, изображенная на рис. 77, б. Величина $\frac{2c_0}{\gamma+1}$ представляет собой наибольшую возможную скорость вытекания газа из трубы в рассматриваемых условиях. Если внешнее давление

$$p_e < p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \tag{1}$$

то соответствующая ему скорость v_e сделалась бы больше, чем $2c_0/(\gamma+1)$. В действительности при этом давление на выходе трубы будет продолжать оставаться равным предельному значению (1), а скорость вытекания — равной $2c_0/(\gamma+1)$; остальное падение давления (до p_e) происходит во внешней среде.

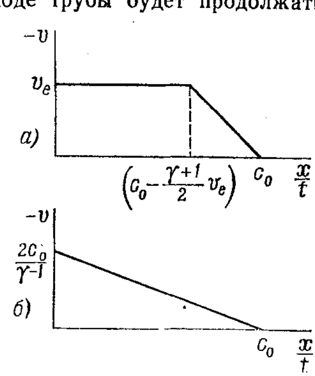

Рис. 77

4. Бесконечная труба перегорожена поршнем, по одну сторону от которого ($x < 0$) в начальный момент времени находится газ под давлением p_0, а по другую сторону ($x > 0$) — вакуум. Определить движение поршня под влиянием расширяющегося газа.

Решение. В газе возникает волна разрежения, одна из границ которой перемещается вместе с поршнем вправо, а другая — влево. Уравнение движения поршня

$$m\frac{dU}{dt} = p_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{U}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

(U — скорость поршня, m — масса, приходящаяся на единицу его площади). Интегрируя, получим:

$$U(t) = \frac{2c_0}{\gamma-1}\left\{1 - \left[1 + \frac{(\gamma+1)p_0}{2mc_0}t\right]^{-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right\}.$$

5. Определить движение в изотермической автомодельной волне разрежения.

Решение. Изотермическая скорость звука

$$c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

и при постоянной температуре $c_T = \text{const} = c_{T_0}$. Согласно (99,5—6) находим поэтому:

$$v = c_{T_0}\ln\frac{\rho}{\rho_0} = c_{T_0}\ln\frac{p}{p_0} = \frac{x}{t} - c_{T_0}.$$

6. С помощью уравнения Бюргерса (§ 93) определить связанную с диссипацией структуру слабого разрыва между волной разрежения и неподвижным газом.

Решение. Пусть неподвижный газ находится слева, а волна разрежения — справа от слабого разрыва (тогда последний движется влево). Без учета диссипации, в первой из этих областей имеем $v = 0$, а во второй движение описывается уравнениями (99,5—6) (с обратным знаком перед c), причем вблизи разрыва скорость v мала; с точностью до членов первого порядка по v имеем

$$\frac{x}{t}=v-c\approx -c_0+\left(1+\frac{\rho_0}{c_0}\frac{dc_0}{d\rho_0}\right)=-c_0+\alpha_0 v,$$

где α определено в (102,2), а индекс 0 указывает значения величин при $v=0$ (ниже этот индекс опускаем).

С точностью до величин второго порядка малости скорость в волне, распространяющейся влево, подчиняется полученному в задаче 1 § 93 уравнению (6), или уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \zeta}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

где $\mu=ac^3$, а неизвестная $u=\alpha v$ выражена в функции от t и $\zeta=x+ct$; переменная ζ измеряет расстояние от слабого разрыва в каждый момент времени t. Требуется найти непрерывное решение этого уравнения с граничными условиями

$$u=\zeta/t \quad \text{при} \quad \zeta\to\infty, \quad u=0 \quad \text{при} \quad \zeta\to-\infty,$$

отвечающими движению без учета диссипации. В соответствии с законом расширения слабого разрыва (96,1), переменная t должна входить в решение в комбинации $z=\zeta/\sqrt{t}$ с переменной ζ. Такое решение может удовлетворять поставленным граничным условиям, если

$$u(t,\zeta)=\frac{1}{\zeta}\psi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{t}}\right).$$

Функция ψ связана с введенной в задаче 2 § 93 функцией φ соотношением

$$-2\mu\ln\varphi=\int\psi(z)\frac{d\zeta}{\zeta}=\int\psi(z)\frac{dz}{z},$$

так что φ зависит только от z, причем

$$\psi(z)=-2\mu z\frac{d}{dz}\ln\varphi(z).$$

Уравнение (3) указанной задачи принимает вид $2\mu\varphi''=-z\varphi'$, откуда

$$\varphi(z)=\int e^{-z^2/4\mu}\,dz.$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(z,\zeta)=\frac{2\mu z}{\zeta}\left[e^{z^2/4\mu}\int_z^\infty e^{-z^2/4\mu}\,dz\right]^{-1},$$

или окончательно для скорости $v(\zeta,t)$:

$$v(\zeta,t)=\frac{\mu^{1/2}}{\alpha t^{1/2}}\left[e^{\zeta^2/4\mu t}\int_{\zeta/2\sqrt{\mu t}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz\right]^{-1},$$

чем и определяется структура слабого разрыва.